АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

1005—1516

*

№ 3 1953

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

С. М. Никольский, К. А. Огородников, Д. Ю. Панов (председатель редколлегии), Б. Н. Рутовский, Л. И. Седов, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
Основания математики и математическая логика 7
Теория чисел 9
Алгебра 21
Многочлены и линейная алгебра 22
Группы 25
Поля, кольца и структуры 29
Топология 41
Теория функций действительного переменного 47
Приближение функций полиномами и их обобщениями 51
Интегральные преобразования функций . 56
Теория функций комплексного переменного 61
Дифференциальные уравнения 75
Обыкновенные дифференциальные уравнения 75
Уравнения в частных производных 88
Интегральные уравнения 97
Вариационное исчисление. 101
Анализ (другие вопросы) 103
Специальные функции 105
Числовые ряды 108
Функциональный анализ 113
Теория вероятностей 125
Математическая статистика 138
Теоретико-вероятностные и статистические методы в технике 146
Геометрия 149
Геометрические построения и начертательная геометрия 152
Барицентрическое исчисление, геометрия поверхностей и др. 154
Проективная и неевклидова геометрия . . . 157
Алгебраическая геометрия 159
Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей 164
Дифференциальная геометрия n-мерного пространства 168
Метрические методы в исследовании n-мерных множеств 172
Выпуклые многообразия 178
Численные и графические методы 181
Таблицы 192
Вычислительные машины и математические приборы 195
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 224
История математики. Биографии 227
Авторский указатель . . . . . I—V

Адрес редакции: Москва, 57, Балтийский пос., д. 42 Б.

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*

РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, В. М. Курочкин, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников*

Рефераты 1005—1516 **№ 3** **Декабрь 1953 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

1005. Краткий перечень результатов исследовательской работы Института математики Академии Наук Китая в I квартале 1953 года. Лу Ци-кэн (中國科學院數學研究所1953年第一季研究工作成果簡單介紹• 陸啓鏗) // 科學通報 Кэсюэ Тунбао, 1953, № 5, 97 (кит.)

1006. Общегородской математический семинар в Ленинграде. Отрадных Ф. П., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 3(55), 201—202
Собрание математиков Ленинграда. Отрадных Ф. П., Вестн. ЛГУ, 1953, № 5, 129

Сообщение об организационном собрании семинара, объединяющего математиков Ленинграда. Приводится резюме доклада В. И. Смирнова «Современные проблемы математической физики».

1007. Лауреаты премии Кошута за 1953 г. (Az 1953. évi Kossuth-díjak), Akadémiai értesitö, 1953, 60, № 499, 133—143 (венг.)

Сообщается о присуждении премии Кошута за 1953 г. По математическим наукам премии присуждены Рису (Riesz Frigyes) и Надь (Sz.-Nagy Béla) за книгу «Лекции по функциональному анализу», Эгервари (Egerváry Jenö) за достигнутые успехи по дифференциальным уравнениям и их приложениям и Фуксу (Fuchs László) за работы в области теории структур.

1008. Ежегодный конкурс Бельгийской Королевской Академии наук, литературы и искусства (Concours annuels de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux Arts de Belgique), Internat. math. Nachr., 1953, 7, № 25/26, 3 (франц.)

Сообщается о состоявшемся конкурсе. Получил премию Реб (Reeb) (Гренобль) за работу «О некоторых топологических свойствах траекторий динамических систем».

1009. О физико-математическом факультете в Бухаресте (Despre facultatea de matematică şi fizică din Bucureşti), Gaz. mat. şi fiz., 1953, 5, № 5, 225—228 (рум.)

Сведения о факультете и об условиях приема студентов.

1010. Математический центр в Амстердаме. Рихтер (Das mathematische Zentrum in Amsterdam. Richter L.), Maschinenbau und Wärmewirtsch., 1953, 8, № 4, 113 (нем.)

Приводится часть сообщения, сделанного Схоутеном на III Австрийском математическом конгрессе (9—11 сентября 1952 г.), о работе созданного шесть лет тому назад голландскими математиками научного центра по приложениям математики (в том числе статистики, вычислительной техники и т. п.).

Этот центр занят разработкой проблем, которые ставятся перед ним промышленностью и научно-исследовательскими организациями. Обсуждается вопрос о создании подобного центра в Австрии.

1011. Октябрьское собрание в Нью-Хейвене (The October meeting in New Haven), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 1, 39—51 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 184-му собранию Американского математического общества 25 октября 1952 г., в числе которых следующие:

Алгебра и теория чисел

1. Некоторые суммы, аналогичные суммам Дедекинда. **Карлиц** (Carlitz Leonard).

Строятся суммы, аналогичные суммам Дедекинда, над полем $GF(q, x)$.

2. Теория взаимности сумм Дедекинда. **Карлиц** (Carlitz Leonard).

Дается новое доказательство теоремы взаимности.

3. Об одной упорядоченной полугруппе. **Кехата** (Chehata C. G.).

Доказывается, что построенная А. И. Мальцевым (Math. Ann., 1937, **113**, 686—691) не вкладываемая в группу полугруппа может быть упорядочена. Построенное А. И. Мальцевым не вложимое в тело кольцо вкладывается в кольцо степенных рядов.

4. О Q-ядрах с операторами. **Кобб, Тейлор** (Cobbe A. P., Taylor R. L.).

5. Теория вещественных точек. **Ланг** (Lang S.). (см. РЖМат, 1953, реф. 606).

6. Представление вполне дистрибутивных полных структур подпрямыми суммами. Предварительное сообщение. **Ренеи** (Raney G. N.).

Изучаются полные структуры. Доказывается, в частности, что вполне дистрибутивная полная структура изоморфна замкнутой подструктуре прямой суммы полных цепей.

7. О представлениях алгебр Ли простой характеристики. **Цассенхауз** (Zassenhaus H. J.).

Доказывается, что ассоциативная алгебра Биркгофа — Вита $A(L)$, порождаемая алгеброй Ли L конечной размерности n над полем F характеристики p, является максимальным порядком некоторого тела K. Изучается связь представлений L со специализациями центра Z кольца $A(L)$.

Анализ

8. О положительности многочлена для положительных значений переменной. **Андрушков** (Andrushkiw Joseph).

Даются выраженные через нули многочлена $f(z)$ необходимые и достаточные условия для того, чтобы $f(z) > 0$ при $z \geqslant 0$.

9. Полнота собственных функций и разложения по собственным функциям для несамосопряженных линейных эллиптических дифференциальных уравнений любого порядка. **Браудер** (Browder F. E.).

10. Полнота и слабая компактность в линейных топологических пространствах. **Коллинс** (Collins H. S.).

11. Области, свободные от нулей многочленов. **Коулинг, Трон** (Cowling V. F., Thron W. J.).

Доказаны некоторые утверждения о расположении нулей полиномов. Приведен пример одного из них: Пусть $P(z) = a_0 + a_1 z^{r_1} + \cdots + a_n z^{r_n}$, где $a_k \neq 0$, $k = 0, \ldots, n$ и $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$. Тогда $P(z)$ имеет все нули $|z| \leqslant \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} [((1 + r_{k-1})/r_k) \, | a_{k-1}/a_k |]^{1/(r_k - r_{k-1})}$, где $r_0 = 0$, $r_n = 1$, а остальные r_k — произвольные положительные числа.

12. Решение сингулярной задачи Коши для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу. **Дайаз, Уэнбергер** (Diaz J. B., Weinberger H. F.).

Дается решение задачи Коши для уравнения $\Delta u = u_{tt} + (K/t) u_t$; $u(x_1, \ldots, x_m, 0) = f(x_1, \ldots, x_m)$, $u_t(x_1, \ldots, x_m, 0) = 0$, где K — действительная константа, а функция f задана.

13. Краевые задачи и полугруппы, связанные с некоторыми интегро-дифференциальными операторами. **Эллиот** (Elliott Joanne).

14. О порождении сильно непрерывных полугрупп. **Феллер** (Feller William).

Изучается полугруппа $\{T_t\}$ ограниченных линейных операторов в пространстве Банаха X, сильно непрерывная для $t > 0$.

15. Полугруппы преобразований в общих слабых топологиях. **Феллер** (Feller William).

16. Постоянные Лебега для метода суммирования Эйлера. **Ливингстон** (Livingston A. E.).

17. Теорема взаимности Фробениуса для некомпактных подгрупп. Предварительное сообщение. **Маккей** (Mackey G. W.).

18. Полная устойчивость и приближенно-периодические колебания. **Массера** (Massera J. L.).

Изучается устойчивость решений системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = X(x, t)$, $X(0, t) = 0$.

19. Задача Коши с начальными данными на параболической линии. **Проттер** (Protter M. H.).

Рассматривается уравнение

$$K(y) P(x, y) u_{xx} - u_{yy} + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = f(x, y),$$

где $K(y)$ ведет себя как y^α, $\alpha > 0$, в окрестности $y = 0$, $P(x, y) > 0$ для всех x, y и все коэффициенты дважды дифференцируемы. Ставится задача Коши для этого уравнения при начальных условиях, заданных на сегменте оси (являющемся параболической линией).

20. Распространение результатов о единственности тригонометрических рядов. **Шапиро** (Shapiro V. L.).

21. Комплексные алгебры Банаха с инволюцией. **Юд** (Yood Bertram).

22. Гомоморфизмы, определенные на регулярных алгебрах Банаха. **Юд** (Yood Bertram).

23. О матрице Грина для дифференциальных систем. **Циммерберг** (Zimmerberg H. J).

Прикладная математика

24. Теория топологических и динамических инвариантов электрических цепей. **Дойл** (Doyle T. C.).

25. Симметричный метод определения коэффициентов рядов Фурье. **Макниш** (MacNeish H. F.).

Дается простая общая схема, не связанная с диаграммой Рунге, для определения коэффициентов Фурье a_r и b_r при любых n ряда

$$f(x) = \sum_{r=0}^{r=n} a_r \cos rx + \sum_{r=1}^{r=n-1} b_r \sin rx,$$

где $f(x)$ задана таблично своими значениями (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, 2n - 1$.

26. О методе Ричардсона для решения линейных систем с положительно определенными матрицами. **Янг** (Young D. M.).

Применяя одну теорему о полиномах Чебышева (Flanders, Shortley, J. Appl. Phys., N.Y., 1950, 21, 1326—1332, см. также РЖМат., 1953, реф. 895), автор дает обобщение метода Ричардсона для решения неоднородной линейной системы алгебраических уравнений с положительно определенной матрицей. Этот метод, по мнению автора, хорошо приспособлен к автоматическим вычислительным машинам.

Геометрия

27. Ориентированность полей линейных элементов. **Маркус** (Markus L. F.).

28. Группа аффинных преобразований многообразия с аффинной связностью. **Номидзу** (Nomizu Katsumi).

29. Частично упорядоченные геометрии. Предварительное сообщение. **Преновиц** (Prenowitz Walter).

Основания математики и математическая логика

30. Об одном предположении Поста. **Дейвис** (Davis M. D.).

При помощи трансфинитной рекурсии для каждого $\alpha < \omega^2$ определяется множество K_α целых чисел. Пусть P_α — класс всех предикатов, много-однозначно сводимых к K_α, а Q_α — класс всех отрицаний P_α. Доказывается: предикат w принадлежит $P_\alpha(Q_\alpha)$ тогда и только тогда, когда существует рекурсивный предикат N (некоторые из переменных которого могут пробегать множество всех конечных последовательностей натуральных чисел) такой, что $W \equiv |\pi_\alpha| N$ (соответственно $W \equiv |\overline{\pi}_\alpha| N$), где $|\pi_\alpha|$ и $|\overline{\pi}_\alpha|$ обозначают трансфинитные последовательности кванторов, определяемые рекурсией. Тем самым теорема Поста (Post E. L., Bull. Amer. Math. Soc., 1948, 54, № 7, 269) распространяется на трансфиниты.

31—32. Некоторые результаты, касающиеся определимости и разрешимости в элементарных теориях. I и II. Хартли (Hartley Rogers, Jr).

Развивается общая теория выразимости любых предикатов узкого исчисления через определенное количество предикатов определенного вида и сведения проблемы разрешимости узкого исчисления к случаю формул, содержащих определенное число предикатов того или иного вида. Один из результатов такого типа был получен Чёрчем и Куайном (Church A., Quine, J. Symbolic Logic, 1951, 16, 239—240), которые дали формулу для выражения любого двуместного предиката через симметричный двуместный предикат. Известные методы разрешимости для формул узкого исчисления, содержащих одну эквивалентность R и любое количество одноместных предикатов F_i, удовлетворяющих тому условию, что $R(x, y) \supset_{xy} \cdot F_i(x) \supset F_i(y)$ истинно, автор распространяет на случай, когда это условие не обязательно выполнено для всех F_i, и на случай, когда R — любое симметричное и транзитивное отношение.

Все эти результаты применяются к так называемой элементарной теории прямоугольных таблиц, то есть к узкому исчислению, индивидуальными предметами которого служат вхождения единиц в прямоугольные таблицы (не обязательно конечные) из единиц и нулей, а индивидуальные предикаты образуются по правилам узкого исчисления из двух постоянных двуместных предикатов C и R, означающих «в том же столбце» и «в той же строке». Доказывается: теории таблиц типов $m \times n$, $m \times$ конечн., $m \times \infty$ разрешимы; теория таблиц типа $\infty \times \infty$ аксиоматизируема, но неразрешима; теории таблиц типов конечн. × конечн. и конечн. $\times \infty$ эквивалентны, хотя вопрос об аксиоматизируемости и разрешимости каждой из них остается невыясненным.

Теория вероятностей и математическая статистика

33. О равномерной распределенности последовательности накопленных сумм независимых случайных величин. **Роббинс** (Robbins H.).

Топология

34. Условия компактности и равномерные структуры. **Дикинсон** (Dickinson A. B.).

35. Пересечение и замыкание. **Готшок** (Gottschalk W. H.).

36. Фактор пространства разрешимых групп. **Мостов** (Mostow G. D.).

1012. Международный математический конгресс 1954 года (Internationaler Mathematikerkongress 1954), Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 25/26, 1—2 (нем.)

Оповещение организационного комитета о том, что в Амстердаме с 2 по 9 сентября 1954 г. состоится Международный математический конгресс.

1013. Математика и историография. Гленн (Mathematics and historiography. Glenn Oliver E.), Math. Mag., 1953, **26**, № 4, 205—208 (англ.)

Всякая наука, в том числе и математика,— пишет Гленн, ссылаясь на Бенедетто Кроче,— является исторической. Но историография это не просто хроника событий: историк должен решать исторические проблемы и давать оценки излагаемым фактам.

Исторические проблемы и оценки, которыми занимается математик, состоят в выяснении места его работы по отношению к предшествующим и смежным, в выяснении перспектив дальнейшего развития и приложений, а также отношений к внешнему миру.

Так, «Небесная механика» Лапласа с некоторой точки зрения есть изучение отношений дифференциального и интегрального исчисления к обширной проблеме внешней реальности.

В этой связи автор протестует против практики опубликования математических результатов без доказательств, а также против недостаточно развернутых докладов на съездах.

Эту практику он связывает с философией трансцендентализма, в значительной мере повинной в застое науки в Америке (в Новой Англии), начиная с викторианской эры. Автор предвидит обвинение в отсутствии веры в идеализм и пытается его опровергнуть, толкуя идеализм как идеал (свою точку зрения он отождествляет с философией Бенедетто Кроче). *С. А. Яновская*

1014. Геометрический характер электромагнетизма и электротехники. Сартр (L'esprit de géométrie en électromagnétisme et en électrotechnique. Sartre L.), Bull. Soc. franç. électr., 1953, **3**, № 27, 105—115 (франц.)

Популярное изложение частных вопросов электротехники разветвленных цепей. *Д. Н. Четаев*

1015. Теория, практика и магия чисел. Вейль (Theorie, Praxis und Magie der Zahlen. Weyl Hermann), Vierteljahresschr. naturforsch. Ges., Zürich., 1953, **98**, № 1, 44—45 (нем.)

Автореферат популярной лекции о понятии числа, прочитанной на заседании Общества естествоиспытателей в Цюрихе.

1016 РЕЦ. Введение в научные исследования. Вильсон (An introduction to scientific research. Wilson E. Bright., pp. 375 + + XIII, ill., N. Y., McGraw-Hill Book Co, Inc., 1952, 6.00 doll.) [**Рецензия: Халлиди** (Halliday D.), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 4, 319—320 (англ.)]

1017 РЕЦ. Элементы математики. Бурбаки (Eléments de mathématique. Bourbaki N., Verlag Hermann, Paris) [**Рецензия: Люсси** (Lüssy Willy), Elem. Math., 1953, 8, № 4, 96 (нем.)]

1018 РЕЦ. Лекции по анализу. Т. 2 и 3. Севери, Скорца-Драгони (Lezioni di analysi. Severi Francesco, Scorza-Dragoni Giuseppe, vol. 2, pp. VII + + 398, Bologne, Zanichelli, 1948; vol. 3, pp. VI + 255, Bologne, Cesare Zuffi, 1951) [**Рецензия: Годо** (Godeaux Lucien), Bull. sci. math., 1953, **77**, mars-arvil, 44—47 (франц.)]

1019 РЕЦ. Собрание математических сочинений. Бор (Collected mathematical works. Bohr H., **3**, pp. 1000, Danish Math. Society with support of the Rask-Ørsted Foundation and the Carlsberg Foundation, Kφbenhavn, 1952) [**Рецензия: Фёльнер, Ессен** (Følner E., Jessen B.), Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 25/26, 36—37 (англ.)]

1020 **РЕЦ.** **Новое исчисление. Ч. III. Сиддонс, Снелл, Морган** (A new calculus. Part III. Siddons A. W., Snell K. S., Morgan J. B., pp. VI + 463, Cambridge University Press, New York, 3.75 doll.) [**Рецензия: Рид** (Read Cecil B.), School. Sci. and Math., 1953, **53**, № 4, 332 (англ.)]

1021 **РЕЦ.** **Практическая математика. Т. 2. Тофт, Мак-Кей** (Practical mathematics. V. 2. Toft Louis, McKay A. D. D., 3 ed., pp. 532, 114 fig., London, Sir Isaac Pitman and Sons, Ltd., 30 s. net.) [**Рецензия:** Colliery Engng, 1953, **30**, № 352, 223 (англ.)]

1022 **РЕЦ.** **Высшая математика в физике и технике. Бронуэлл** (Advanced mathematics in physics and engineering. Bronwell A., McGraw-Hill, N. Y., 1953) [**Рецензия: Цетто** (Zetto L.), Ingegnere, 1953, **27**, № 6, 695 (итал.)]

1023 **РЕЦ.** **Ворота в математику** (Tore zur Mathematik, S. 328, P. Mathesius, 1952, 11.20 DM) [**Рецензия: Франке** (Franke Walter), Neue Techn. Bücher, 1953, **30**, № 2, 44 (нем.)]

1024 **РЕЦ.** **Словарь математических наук. Т. 1. Немецко-английский. Херланд** (Wörterbuch der mathematischen Wissenschaften. Band 1: Deutsch-Englich. Herland Leo, pp. 235, London, Hafner Publishing Co., Ltd., 1951, 24 s.) [**Рецензия: Годдард** (Goddard L. S.), Nature, 1953, **171**, № 4358, 811 (англ.)]

См также: 1028 РЕЦ, 1031 РЕЦ, 1032 РЕЦ, 1069 РЕЦ, 1126, 1234, 1286 РЕЦ, 1431

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

1025. **Нормальные алгорифмы и рекурсивные функции. Детловс В. К.,** Докл. АН СССР, 1953, 90, № 5, 723—725

Работа примыкает к исследованиям А. А. Маркова по теории алгорифмов (Марков А. А., Тр. Мат. ин-та им. Стеклова, 1951, **38**, 176). В алфавите $C = \{|, *\}$ натуральное число n записывается как слово «| ... |» (n черточек), а система чисел $x_1,\ldots,x_n$ — как слово $x_1 * \ldots * x_n$.

Функция $\varphi(x_1,\ldots, x_n)$ называется алгорифмической, если существует нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$ над алфавитом C такой, что

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mathfrak{A}(x_1 * \ldots * x_n). \qquad (1)$$

Знак $\simeq$ означает, что если осмыслена левая часть, то осмыслена также правая, причем они равны, и наоборот. В случае, когда в (1) алгорифм $\mathfrak{A}$ применим ко всем словам вида $x_1 * \ldots * x_n$, функция называется вполне алгорифмической.

Устанавливается, что объемы понятий алгорифмической и частично рекурсивной функций совпадают. Так же совпадают объемы понятий вполне алгорифмической и общерекурсивной функций.

Б. А. Трахтенброт

1026. **Исчисление классов. Ваккарино** (Il calcolo delle classi. Vaccarino Giuseppe), Archimede, 1953, 5, № 2, 54—55 (итал.)

Рассматривается вопрос об изоморфизме между исчислением одноместных предикатов и исчислением классов. Новых результатов статья не содержит. *А. С. Есенин-Вольпин*

1027. **Логика и проектировщик схем. Крейвен** (Logic and the circuit designer. Craven T. L.), Electronic Engng, 1953, 25, № 304, 257—259 (англ.)

Излагаются некоторые элементы формально-логического учения о суждении (силлогизм, квадрат противоположностей, основные логические связки и т. п.), приводятся некоторые основные формулы алгебры логики (исчисления предложений), которые иллюстрируются схемами, построенными из контактов двухпозиционных реле. В заключение дается пример упрощения схемы посредством упрощения соответствующего этой схеме алгебраического выражения.

Статья не содержит ни новых результатов, ни новых идей.

Показав на нескольких примерах применение алгебры логики в теории релейно-контактных схем, автор ставит перед собой задачу заинтересовать проектировщиков схем «чистой» формальной логикой. *В. И. Шестаков*

1028. **О модальных логических исчислениях высказываний и их связи со структурами. IV. Риддер** (Über modale Aussagenlogiken und ihren Zusammenhang mit Strukturen. IV. Ridder J.), Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., A, 1953, **56**, № 2, 99—110; Indagationes math., 1953, **15** № 2, 99—110 (нем.)

Автор продолжает исследования, начатые в частях I, II и III (см. РЖМат, 1953, реф. 17). Рассматриваются модальные исчисления с оператором M, удовлетворяющим топологическим аксиомам замыкания: $X \subset MX$, $M\lambda \subset \lambda$, $M(X+Y) \subset MX+MY$, $MX + MY \subset M(X+Y)$,

$$\frac{\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}}{M\mathfrak{B} \subset M\mathfrak{A}},$$

и структуры, соответствующие этим исчислениям. Для ряда модальных исчислений такого типа решается проблема разрешимости. *А. А. Зыков*

1029 **РЕЦ.** **Очерк о преобразованиях логических операций. 256 операций трехзначного исчисления высказываний. Пьяже** (Essai sur les transformations des opérations logiques. Les 256 opérations de la logique trivalente des propositions. Piaget Jean, pp. 240, Presses Universitaires, Paris, 1952, 1400 fr.) [**Рецензия: Булиган** (Bouligand G.), Rev. gén. sci. pures et appl., 1953, **60**, № 3—4, 118 (франц.)]

1030 **РЕЦ.** **Аксиоматические системы теории множеств. Хао Ван, Мак-Нотон** (Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles. Hao Wang, McNaughton Robert,

Gauthier-Villars, Paris, 1953) [Рецензия: (J. S. P.), Gaz. mat. (Lisboa), 1953, 14, № 54, 32 (порт.)]

1031 РЕЦ. Переводы из философских сочинений Готтлоба Фреге. Гич, Блэк (Translations from the philosophical writings of Gottlob Frege. Geach Peter, Black Max, pp. 244, Blackwell, Oxford, 1952, 25 s.) [Рецензия: **Гудстейн** (Goodstein R. L.), Math. Gaz., 1953, 37, № 320, 141—143 (англ.)]

1032 РЕЦ. Введение в метаматематику. Клини (Introduction to metamathematics. Kleene S. C., pp. 550, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1952) [Рецензия: **Саган** (Sagan H.), Internat. math. Nachr., 1953, 7, № 25/26, 47—48 (нем.)]

1033 Д. Нормальные алгорифмы и рекурсивные функции. Детловс В. К. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., ЛГУ, Л., 1953

1034 Д. Вопросы функциональной полноты в k-значном исчислении. Яблонский С. В. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., МГУ, М., 1953

См. также: 1011, 1113, 1359

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1035. Об одном классе вполне мультипликативных функций. Чудаков Н. Г., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 3 (55), 149—150

Строится пример обобщенного характера, т. е. такой вполне мультипликативной функции $h(n)$, отличной от характеров Дирихле, которая удовлетворяет условиям:

$$1)\quad |h(n)| = 0;\ 1,$$

$$2)\quad \sum_{n\leqslant x} h(n) = O(1).$$

Именно, доказывается, что этими свойствами обладает функция

$$h(n) = \chi(n)\cdot n^{ti},$$

где $\chi(n)$ — неглавный характер Дирихле $(\mathrm{mod}\, D)$ и t — действительное число, отличное от нуля.

Этот характер принимает бесконечное число разных значений и ему соответствует целая функция

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} = L(s-t, \chi).$$

Автор считает интересным построение новых примеров обобщенных характеров, принимающих конечное число значений или таких, которым соответствует нецелая функция. *Г. В. Емельянов*

1036. О характерах числовых полугрупп с достаточно редкой базой. Бредихин Б. М., Докл. АН СССР, 1953, 90, № 5, 707—710

На полугруппе положительных вещественных чисел $\alpha \geqslant 1$ с бесконечной базой $\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots$ рассматривается нормированный характер $\chi(\alpha)$.

Вводятся обозначения:

$$\pi(x) = \sum_{1\leqslant\omega_i\leqslant e^x} 1; \qquad H(x) = \sum_{1\leqslant\alpha\leqslant e^x} \chi(\alpha),$$

$\ln_2 x = \ln\ln x$ и т. д., $e_2(x) = e^{e^x}$ и т. д.

Доказывается, что сумматорная функция характера не ограничена в следующих случаях:

1. Если одно из чисел $\chi(\omega_i) = 1$ и $\pi(x) = O(\ln x)$, то $H(x) = \Omega(x^{\mu})$, $0 < \mu < 1$.

2. Если все числа $\chi(\omega_i) \neq 1$, $\pi(x) = O(\ln_{m+1} x)$ и если найдутся два базисных числа ω_l, ω_k такие, что число $\vartheta = \ln\omega_k / \ln\omega_l$ разлагается в цепную дробь $[a_0, a_1, \ldots, a_\nu, \ldots]$ с медленно растущими неполными частными $a_\nu = O(e_m(c\nu))$ и знаменателями подходящих дробей $q_{\nu+1} = O(e^{\rho\nu})$, где $0 < \rho < 1$, то

$$H(x) = \Omega((\ln_m x)^{\mu}),\ 0 < \mu < \frac{1}{2}.$$

Доказательство основывается на работе Н. Г. Чудакова и А. К. Павлючука (Тр. Мат. ин-та им. Стеклова, 1951, 38, 366—381), посвященной частному случаю конечной базы.

Условия, выражающие достаточную редкость базы, следует формулировать точнее, чем это сделано в реферируемой заметке. Например, $\pi(x) \leqslant \leqslant \ln^{-1} 2\cdot(1-\mu)\ln x$, $0 < \mu < 1$, вместо $\pi(x) = O(\ln x)$. *К. А. Родосский*

1037. Оценка приближения алгебраических иррациональностей отношениями логарифмов растущих натуральных чисел. Платонов М. Л., Тр. Иркутского гос. ун-та, 1953, 8, № 1, 53—62

Используя метод А. О. Гельфонда (см. Усп. мат. наук, 1949, 4, № 4 (32), 19—49), автор доказывает теорему:

Пусть α— фиксированное, иррациональное, алгебраическое число. Каковы бы ни были натуральные числа p и $q > q_0$ такие, что $\dfrac{\ln p}{\ln q}$ — иррациональное число, имеет место оценка

$$\left|\alpha - \frac{\ln p}{\ln q}\right| > \exp(-\ln^2 q\cdot \ln^{5+\varepsilon}\ln q),\quad \varepsilon > 0.$$

А. А. Киселев

1038. Улучшенная оценка границы нулей L-функций. Климов А. И., Украинский мат. ж., 1953, 5, № 2, 171—184

Используя новые оценки тригонометрических сумм, принадлежащие И. М. Виноградову, автор уточняет результаты референта о границе нулей L-функций. Все встречающиеся в работе постоянные подсчитаны численно.

Основной результат автора:

$L(s, \chi) \neq 0$ в области $\sigma \geqslant 1 - c_1\varphi(|t|)$, где $c_1 = 0{,}0005$;

$\varphi(|t|) = \ln(k+3) + [\ln(|t|+8)\ \ln\ln(|t|+8)]^{3/4}$,

k — модуль характера χ; $|t| \geqslant 1$ для действитель-

ного характера; $|t|$ — любое для главного и комплексного характеров. *Н. Г. Чудаков*

1039. Об оценке одного определенного интеграла. Ширшов В. М., Сб., научн. работ Белорусского политехн. ин-та, 1953, № 4, 13—24

Пусть

$$W_0(N) = \int_{\mathfrak{M}} L_\alpha^r \exp(-2\pi i \alpha N)\, d\alpha,$$

где

$$L_\alpha = \sum_{x=1}^{Q} \sum_{y=1}^{[Px^{-s}]} \exp 2\pi i \alpha x^m y^n$$

(m, n, r, N — натуральные числа),

$\mathfrak{M}$ — множество точек, принадлежащих соединению так называемых дополнительных интервалов, которые определяются условиями, указанными в работе.

Автор стремится доказать, что

$$W_0(N) \ll P^{r-n-\nu+\nu\mu};$$

это дало бы возможность завершить доказательство обобщенной теоремы Варинга того типа, который рассматривается в реферируемой работе.

Однако референт не мог проследить до конца детали доказательства, так как, например, в определении понятия дополнительного интервала имеются неясности: не дано точного определения величин x, x_1, x_2,..., x_r (подобная же неясность имеется и в предыдущей работе автора, см. тот же сборник, № 2). *Н. Г. Чудаков*

1040. О функции Эйлера. Вальфиш А. З., Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 4, 491—493

Доказывается, что

$$\sum_{n \leqslant x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O\left(x (\ln x)^{3/4} (\ln \ln x)^2\right), \qquad (1)$$

где $\varphi(n)$ — функция Эйлера.

Оценка (1) уточняет известные результаты Мертенса (Mertens F., J. reine und angew. Math., 1874, **77**, 289).

Доказательство базируется на оценках тригонометрических сумм, принадлежащих И. М. Виноградову. *Н. Г. Чудаков*

1041. Числа Кармихаэля. Кнёдель (Carmichaelsche Zahlen. Knödel Walter), Math. Nachr., 1953, 9, № 6, 343—350 (нем.)

Изучаются обобщенные числа Кармихаэля, называемые автором C_k-числами. Пусть $k > 0$ — целое число; тогда число $c > k$ называется C_k-числом, если

$$a^{c-k} \equiv 1 \,(c)$$

для всех a, взаимно простых с c. При $k = 1$ C_k-числа — это обычные числа Кармихаэля, т. е. числа, для которых справедлива малая теорема Ферма.

Доказываются следующие свойства C_k-чисел:

Пусть

$$c = \prod_{i=0}^{\infty} p_i^{c_i}, \quad k = \prod_{i=0}^{\infty} p_i^{k_i}, \quad c_i \geqslant 0, \quad k_i \geqslant 0, \quad p_0 = 2.$$

1) Число c является C_k-числом тогда и только тогда, когда из $c \equiv 0 \,(p_i)$ следует, что $c - k \equiv 0 (\varphi(p_i^{c_i}))$ в случае $i > 0$ или $i = 0$ и $c_0 \leqslant 2$; или $c - k \equiv \equiv 0 (^1/_2 \varphi(p_i^{c_i}))$ в случае $i = 0$ и $c_0 > 2$.

2) Имеют место неравенства для показателей: $c_i \leqslant k_i + 1$ для $i \geqslant 1$; $c_0 \leqslant k_0 + 2$; $c_0 = k_0$, если $k_0 = 0$. В частности, если $(c, k) = 1$, то c есть бесквадратное нечетное число.

3) Вообще говоря, C_k-числа представимы в форме $c = mpq$, где $p < q$ — наибольшие простые числа, причем или $c = O(k^6)$, или $p < 3m^2$, $q < 4m^3$; исключение составляют простые числа, а также числа c, для которых $m \nmid k$, и некоторые другие в количестве $O(k)$.

4) Пусть $z(k, x)$ — количество C_k-чисел, меньших x. Тогда $z(k, x) = O\left(kx\, 2^{-\sqrt{\log x}} + k^6\right)$.

5) Для C_1-чисел и C_k-чисел с условием $m \nmid k$ $z(k, x) = \Omega(x/k \log x)$.

Свойства 1) — 3) в случае $k = 1$ дают ранее известные свойства чисел Кармихаэля.

А. В. Малышев

1042. О линейном диофантовом приближении для положительных значений переменных. Обрешков (Sur l'approximation diophantique linéaire pour des valeurs positives des variables. Obrechkoff N.), Докл. Болг. АН, 1951, **4**, № 1, 1—4 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

При помощи некоторой модификации принципа Дирихле доказывается теорема:

Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ — произвольные вещественные числа, а n — натуральное число. Тогда найдутся целые неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$, не все равные нулю, и целое число y — такие, что будут выполняться неравенства

$$x_i \leqslant n, \; i = 1, 2, \ldots, k, \; |\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_k x_k - y| \leqslant \frac{1}{kn+1}, \qquad (1)$$

причем знак равенства в (1) будет иметь место только в случае, если форма

$$f = \sum_{i=1}^{k} \omega_i x_i$$

сравнима по модулю 1 с формой $\frac{\lambda}{kn+1}(x_1 + \ldots + x_k)$, где λ — целое число, взаимно простое с $kn + 1$.

В конце работы без доказательства приводятся две теоремы, обобщающие сформулированную выше, доказательство которых может быть проведено аналогичным образом. *А. А. Киселев*

1043. Критерий иррациональности. Черчхаус (A criterion for irrationality. Churchhouse R. F.), Canad. J. Math., 1953, 5, № 2, 253—260 (англ.)

При помощи теоремы Лежандра (Geométrie et trigonométrie, Paris, 1821) об иррациональности непрерывной дроби $\frac{m_1}{n_1+}\frac{m_2}{n_2+}\frac{m_3}{n_3+}\ldots$ при целых положительных m_i, n_i и $0 < m_i/n_i < 1$, $i \geqslant i_0$, доказывается следующая теорема.

Пусть $\psi(n)$ положительная, целочисленная, возрастающая функция от целого аргумента n,

$$F(x)=\sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p, \quad G(x)=\sum_{p=0}^{\infty} b_p x^p,$$

где a_p — число представлений p в форме $p=\psi(m_1)+\ldots+\psi(m_k)$ при $m_k>m_{k-1}>\ldots>m_1=1$, $m_{i+1}-m_i\geqslant 2$; $b_0=1$; для $p\geqslant 1$ b_p — число представлений p в форме $p=\psi(m_1)+\ldots+\psi(m_k)$ при $m_k>m_{k-1}>\ldots>m_1\geqslant 2$, $m_{i+1}-m_i\geqslant 2$;

$$\gamma=\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\psi(n)}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\psi(n-r).$$

Тогда для целых положительных r и s, $(r,s)=1$, $r<s^\gamma$, число $H(r/s)=F(r/s)/G(r/s)$ будет иррациональным.

В частности, из этой теоремы при $\psi(n)=n$ вытекает иррациональность числа

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(s^{5n+2}-r^{5n+2})(s^{5n+3}-r^{5n+3})}{(s^{5n+4}-r^{5n+4})(s^{5n+1}-r^{5n+1})},$$

где r, s — целые положительные числа, $(s,r)=1$, $r^2<s$. Приводятся и другие примеры.

Н. И. Фельдман

1044. Об одной задаче теории диофантовых приближений. К о л (A probleme of diophantine approximation. C o l e A. J.), Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., A, 1953, 56, № 2, 144—157; Indagationes math., 1953, 15, № 2, 144—157 (англ.)

Пусть Γ означает нижнюю грань положительных чисел C, обладающих следующим свойством: каковы бы ни были иррациональное число θ и вещественное число α, не представимое в форме $a\theta+b$ с целыми a и b, неравенство

$$|\theta x-y+\alpha|<\frac{C}{|x|}$$

имеет бесчисленное множество решений в целых $x>0$, y. Автор доказывает, что

$$\frac{7}{16\sqrt{2}}=0{,}309\ldots\leqslant\Gamma\leqslant\frac{3}{1+2\sqrt{10}}=0{,}409\ldots$$

До сих пор было известно только $\Gamma\leqslant\frac{1}{\sqrt{5}}$ (Хинчин) и $\Gamma\geqslant\frac{1}{4}$ (Грэс).

А. Я. Хинчин

1045. Об аддитивной проблеме Малера. П е н н и н г т о н (On Mahler's partition problem. P e n n i n g t o n W. B.), Ann. Math., 1953, 57, № 3, 531—546 (англ.)

Аналитическими методами изучается класс аддитивных проблем, включающий в себя следующую проблему Малера (Mahler K., J. London Math. Soc., 1940, 15, 115—122): найти количество $p(n)$ решений уравнения

$$n=n_0+n_1r+n_2r^2+\ldots \qquad (1)$$

в целых неотрицательных числах $n_0, n_1, n_2, \ldots$, где r — целое число, большее 1.

Доказывается теорема:

Пусть $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots$ последовательность вещественных чисел такая, что

$$N(u)=\sum_{\lambda_\nu\leqslant u}1=a\ln u+b+R(u)$$

для $u>0$, где

$$\int_{\lambda_1}^{u}\frac{R(v)}{v}\,dv=c+V\left(\frac{\ln u}{\rho}\right)+o(1)$$

при $u\to\infty$, $a>0$, $b, c, \rho>0$ — постоянные, а $V(x)$ — периодическая функция с периодом 1, ограниченная и интегрируемая в интервале $0\leqslant x\leqslant 1$. Пусть $\ldots, c_{-3}, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$ комплексные коэффициенты Фурье функции $V(x)$ для интервала $0\leqslant x\leqslant 1$, причем $c_0=0$, а

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}'|c_\nu/\nu|<\infty,$$

где Σ' — знак суммирования по всем целым ν, кроме $\nu=0$. Обозначим для вещественного u через $P(u)$ количество решений неравенства

$$r_1\lambda_1+r_2\lambda_2+r_3\lambda_3+\ldots<u$$

в целых $r_\nu\geqslant 0$, а через $P_h(u)$ — дробь $\{P(u)-P(u-h)\}/h$. Тогда при $u\to\infty$

$$\ln P(u)=\frac{1}{2}a(\ln u-\ln\ln u-\ln a)^2+$$
$$+\left(a-\frac{1}{2}\right)\ln u+\left(b+\frac{1}{2}\right)(\ln u-\ln\ln u-\ln a)+ \qquad (2)$$
$$+W(\ln u-\ln\ln u-\ln a)-\frac{1}{2}\ln 2\pi+H+o(1),$$

$$\ln P_h(u)=\frac{1}{2}a(\ln u-\ln\ln u-\ln a)^2+$$
$$+\left(a-\frac{1}{2}\right)\ln u+\left(b-\frac{1}{2}\right)(\ln u-\ln\ln u-\ln a)+ \qquad (3)$$
$$+W(\ln u-\ln\ln u-\ln a)-\frac{1}{2}\ln 2\pi+H+o(1).$$

Последняя формула справедлива в случае, когда $P_h(u)$ — неубывающая функция u, в частности, когда $h\in\{\lambda_\nu\}$. Здесь

$$H=c-b\ln\lambda_1-\frac{1}{2}a\ln^2\lambda_1+a\int_0^{\infty}\frac{\ln v-\ln(1-e^{-v})}{e^v-1}dv,$$

$$W(z)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}'C_\nu e^{(2\pi i\nu/\rho)z}=$$

$$=-\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{2\pi\nu}{\rho}\right)^2\Gamma\left(\frac{2\pi i\nu}{\rho}\right)\zeta\left(1+\frac{2\pi i\nu}{\rho}\right)c_\nu e^{(2\pi i\nu/\rho)z}$$

Эта теорема аналогична результату Ингам (Ingham A. E., Ann. Math., 1941, 42, 1075—1090). Доказательство проводится сходным образом и опирается на тауберову теорему Ингама (см. цит. раб.).

Из (2), как частный случай, следует асимптотическая формула Малера для количества $p(n)$ решений уравнения (1) (Mahler K., цит. раб.) и

её уточнение, данное Брёйном (de Bruijn N. G., Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch, A, 1948, 51, 659—669). *А. В. Малышев*

1046. Нормальные k-комбинации. Максфилд (Normal k-tuples. Maxfield John E.), Pacif. J. Math., 1953, 3, № 1, 189—196 (англ.)

Рассматриваются комбинации k действительных чисел $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \beta$ (k-комбинации) n-ой k-цифрой β по основанию r (где r — целое число) называется k-комбинация $b^n = (a_1^n, a_2^n, \ldots, a_k^n)$, где a_s^n — цифра дробной части α_s при r-ом разложении. k-комбинация называется просто нормальной по основанию r, если $\lim\limits_{n\to\infty} n_c n^{-1} = r^{-k}$, где n_c — число встреч k-цифры c среди первых n k-цифр дробной части β. k-комбинация называется нормальной по основанию r, если все k-комбинации β, $r\beta$, $r^2\beta$, ... просто нормальны по основаниям $r, r^2, \ldots$

Доказывается, что почти все k-комбинации нормальны; что множество чисел, не являющихся просто нормальными ни для какого r, несчетно.

Доказывается еще 6 довольно сложно формулируемых теорем. Простейшая из них: если $\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ — нормальная k-комбинация и A — неособенная квадратная матрица из k^2 рациональных элементов, то k-комбинация $\gamma = \beta \cdot A$ нормальна.

Ю. В. Линник

1047. Результаты по заполнению равными шапочками n-мерной сферы и поправки к предыдущей работе. Шаботи (Résultats sur l'empilement de calottes égales sur une périsphère de R^n et correction à un travail antérieur. Chabauty Claude), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 15, 1462—1464 (франц.)

Шапочкой раствора θ автор называет сферический круг на n-мерной единичной сфере Σ_n с угловым радиусом θ. Оценивается сверху и снизу наибольшее количество $\nu(\theta, n)$ шапочек раствора θ, располагающихся на Σ_n без перекрытий. Доказывается, что

$$(1-\varepsilon(n))(\sin 2\theta)^{-1} \leqslant (\nu(\theta, n))^{1/n} \leqslant (1+\varepsilon(n))(\sqrt{2}\sin\theta)^{-1}, \quad (1)$$

где $\varepsilon(n) > 0$ и стремится к 0 вместе с n^{-1}, если $\theta \leqslant \pi/2$. При $\theta = \pi/6$ неравенства (1) оценивают наибольшее число $\tau(n)$ равных сфер, касающихся данной сферы того же радиуса и не пересекающихся между собой:

$$\frac{4}{3} - \varepsilon(n) \leqslant (\tau(n))^{2/n} \leqslant 2 + \varepsilon(n) \quad (2)$$

(в статье в этой формуле опечатка). Из (1) выводится также оценка для наибольшего числа $\delta(n)$ вершин n-мерного выпуклого многогранника без диагоналей:

$$\left(\frac{9}{8} - \varepsilon(n)\right)^{n/2} \leqslant \delta(n) \leqslant (2+\varepsilon(n))^{n/2}. \quad (3)$$

Отмечается, что результаты статей автора в C. r. Acad. sci., 1952, 235, 529, 567 нельзя считать верными, ибо они получены при неправильном предположении, что выпуклый n-мерный многогранник без диагоналей есть обязательно симплекс (ср. Nagy, Bull. Soc., math. France, 1941, 69, 3—4, где доказано, что $\delta(n) \geqslant n + [n/4]$). *А. В. Малышев*

1048. К вопросу о множествах точек с целочисленным расстоянием. Штейгер (Zu einer Frage über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung. Steiger Franz), Elem. Math., 1953, 8, № 3, 66—67 (нем.)

Указывается конструкция, дающая возможность найти в пространстве k измерений любое наперед заданное количество $N > k$ точек, не лежащих в одной $(k-1)$-мерной плоскости, все расстояния которых друг от друга целочисленны.

А. В. Малышев

1049. Об остаточном члене в асимптотическом разложении потенциальной энергии нейтральных ионных решеток. Эмерслебен (Über das Restglied der Gitterenergieentwicklung neutraler Ionengitter. Emersleben Otto), Math. Nachr., 1953, 9, № 4, 221—234 (нем.)

Изучаются p-мерные ионные решетки ($p = 1, 2, 3$), т. е. параллелепипедальные системы точек, несущих положительные или отрицательные заряды, и вырезанные из этих решеток правильно расположенные куски (соответственно отрезки прямых, квадраты, кубы). Между точечными зарядами предполагается действие сил, имеющих потенциал вида r^{-s}. Наиболее интересен случай $s = 1$ (ньютонов потенциал для трехмерного пространства). Для системы N точек решетки P_i с зарядами e_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) собственная потенциальная энергия будет иметь вид

$$_N\overline{\Phi} = \sum_{\substack{i,\,k=1 \\ i\neq k}}^{N} e_i e_k (\overline{P_i P_k})^{-s}.$$

Для случая линейной альтернирующей решетки ($p = 1$, знаки зарядов чередуются) при $N \to \infty$ получаем величину, отличающуюся несущественным множителем от ζ-функции Римана; для $p = 2$ и квадратных кусков альтернирующей решетки, ввиду того, что расстояние узлов решетки суть значения бинарной квадратичной формы на целых точках, в пределе получается величина, тесно связанная с ζ-функцией П. Эпштейна (типа $\sum_{\substack{m,n \\ m^2+n^2\neq 0}} (m^2+n^2)^{-s}$); кубические решетки приводят к ζ-функциям П. Эпштейна для тернарных квадратичных форм. Изучаются, в основном, нейтральные куски решеток (с суммой зарядов равной нулю). Последний параграф посвящен ненейтральным решеткам, в частности, таким, где все заряды одноименны. Основная идея работы состоит в изучении бесконечных решеток ($N \to \infty$) при достаточно больших s, когда ряды для $_N\overline{\Phi}$ ($N \to \infty$) будут сходящимися, и в применении аналитической теории ζ-функции Римана или П. Эпштейна для нахождения некоторых физически интересных констант в случае ньютонова потенциала ($s = 1$). Одной из таких физических констант является константа Маделунга, характеризующая потенциальную энергию, приходящуюся на одну пару ионов (Madelung E., Phys. Z., 1918, 19, 524—532). Для

некоторых типов кусков нейтральных решеток с n ионами получено выражение

$$^{(p)}\overline{\Phi} = -\,^{(p)}A 2^{p-1} n^p + \sum_{\substack{k<0 \\ k \text{ целое}}} b_k n^k.$$

Здесь $^{(p)}A$ — константа Маделунга, ряд по отрицательным степеням n сходится. Таким методом исследованы, помимо указанных выше типов решеток для $p=1$ и $p=2$, еще решетки каменной соли и хлористого цезия (в последнем случае кубическая решетка ионов цезия Cs^+ центрирует такую же решетку ионов хлора Cl^-). Указывается, что $^{(p)}\overline{\Phi}$ не может быть полиномом от n и что при физической интерпретации членов полинома как энергии объемной, поверхностной, реберной и вершинной остается еще член $z(n)$, имеющий вид ряда Лорана по отрицательным степеням n и стремящийся к 0 при $n \to \infty$. Например, при $p=1$ и альтернирующей решетке имеем

$$^{(1)}\overline{\Phi} = -\,^{(1)}An + b_0 - z(n);\ z(n) \to 0, \text{ но } \not\equiv 0.$$

В заключение рассматриваются распадения некоторых нейтральных решеток на решетки с одноименными зарядами. Для случая квадратной альтернирующей решетки можно вычислить константу Маделунга, исходя из расчетов для решетки с одноименными зарядами и используя арифметическую теорему о том, что $r_2(2n) = r_2(n)$, где $r_2(n)$ — число разложений n на два квадрата. *Ю. В. Линник*

1050. Сравнения, связанные с разложениями эллиптических функций Якоби в степенные ряды. Карлиц (Congruences connected with the power series expansions of the Jacobi elliptic functions. Carlitz L.), Duke Math. J., 1953, 20, № 1, 1—12 (англ.)

Автор в своих предыдущих работах (Duke Math. J., 1941, 8, 689 — 700; 1949, 16, 285 — 295, 297 — 302) рассматривал некоторые сравнения общего вида для коэффициентов рядов Гурвица, т. е. рядов вида

$$\sum_0^\infty \frac{a_m x^m}{m!}.$$

В частности, им были получены сравнения, связывающие коэффициенты разложений в ряд Гурвица функции Якоби

$$\operatorname{sn} x = \sum_1^\infty \frac{a_m x^m}{m!},$$

где числа $a_m = A_m(k^2)$ целые по простому модулю p при целом по модулю p значении $l = k^2$. Автор рассматривал также коэффициенты β_m ряда Гурвица для функции

$$\frac{x}{\operatorname{sn} x} = \sum_0^\infty \frac{\beta_m x^m}{m!}.$$

В настоящей работе эти результаты обобщаются на ряды Гурвица вида

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{A_m(u)\, x^m}{m!},$$

где $A_m(u)$ — полиномы в $R_p[u]$, а R_p — множество рациональных чисел, целых по простому модулю p. Для случая, когда $A_0(u) = 0$, $A_1(u) = 1$ и когда существует обратная функция вида

$$\lambda(x) = \sum_1^\infty \frac{B_m(u)\, x^m}{m} \qquad (B_1(u) = 1),$$

доказывается, что

$$A_{m+p-1}(u) \equiv B_p(u)\, A_m(u) \pmod p. \qquad \text{(Теорема 1)}$$

Далее показывается, что (при тех же условиях для $f(x)$), если

$$\frac{x}{f(x)} = \sum_0^\infty \frac{\beta_m(u)\, x^m}{m!} \qquad (\beta_0(u) = 1),$$

то будет иметь место сравнение

$$p\,\frac{x}{f(x)} \equiv B_p(u)\, f^{p-1}(x) \pmod p. \qquad \text{(Теорема 2)}$$

Для частного случая функции Якоби

$$\operatorname{sn} x = \operatorname{sn}(x; u) = \sum_0^\infty \frac{A_m(u)\, x^m}{m!}$$

доказывается, что при $r \geqslant 1$

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} B_p^{r-s}(u) A_{m+s(p-1)}(u) \equiv 0 \pmod{(p^r, p^{m_1})},$$

это эквивалентно сравнению

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} A_p^{r-s}(u)\, A_{m+s(p-1)}(u) \equiv 0 \pmod{(p^r, p^{m_1})}.$$

Даются также различные сравнения для коэффициентов разложений в ряды Гурвица произведений вида $\operatorname{sn}^h x \operatorname{cn}^{h'} x \operatorname{dn}^{h''} x$ и некоторых других выражений, содержащих функции Якоби.

А. А. Бухштаб

1051. Заметка о числах Бернулли и Эйлера порядка $\pm p$. Карлиц (A note on Bernoulli and Euler numbers of order $\pm p$. Carlitz L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 2, 178—183 (англ.)

Числа Бернулли $B_m^{(k)}$ порядка k определяются разложением в окрестности нуля:

$$x^k (e^x - 1)^{-k} = \sum_{m=0}^\infty \frac{x^m}{m!} B_m^{(k)} \qquad (B_m = B_m^{(1)}).$$

Автор вводит аналогичные им числа $C_m^{(k)}$ (связанные с числами Эйлера) при помощи ряда

$$2^k (e^x + 1)^{-k} = \sum_{m=0}^\infty \frac{C_m^k}{2^m} \frac{x^m}{m!} \qquad (C_p = C_p^{(1)})$$

и числа

$$\bar{A}_m = \frac{1}{p!} \sum_{r=0}^{p} (-1)^{p-r} \binom{p}{r} r^{m+p},$$

где $\binom{p}{r}$ — число сочетаний из p элементов по r; p — простое.

Доказываются сравнения:

$$\overline{A}_p \equiv p^2 \overline{A}_{p-1} + \frac{1}{18} p^5 B_{p-3} \pmod{p^6};$$

$$C_p^{(p)} \equiv -p^2 (p-1) C_{p-2} \pmod{p^4}$$ и другие.

Ю. В. Линник

1052. Заметка о формулах умножения для полиномов Бернулли и Эйлера. Карлиц (A note on the multiplication formulas for the Bernoulli and Euler polynomials. Carlitz L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 2, 184—188 (англ.)

Полиномы Бернулли $B_m(x)$ и Эйлера $E_m(x)$ связаны соотношениями

$$B_m(kx) = k^{m-1} \sum_{s=0}^{k-1} B_m\left(x + \frac{s}{k}\right), \qquad (1)$$

$$E_m(kx) = k^m \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s E_m\left(x + \frac{s}{k}\right) \quad (k \text{ нечетно}), \qquad (2)$$

$$E_{m-1}(kx) = -\frac{2k^{m-1}}{m} \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s B_m\left(x + \frac{s}{k}\right) \quad (k \text{ четно}). \qquad (3)$$

Как показано Нильсеном, каждое из первых двух соотношений определяет соответствующий полином с точностью до нормирующего множителя. Соотношение (3) для заданного k не определяет входящих в него полиномов аналогичным образом. Показывается, что если для двух соответственно нормированных полиномов соотношение типа соотношения (3) выполняется для двух различных значений k, то эти полиномы отличаются соответственно от $E_{m-1}(x)$ и $B_m(x)$ лишь аддитивными константами. *Ю. В. Линник*

1053. Сравнения, связанные с трехстрочными латинскими прямоугольниками. Карлиц (Congruences connected with three-line latin rectangles. Carlitz L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 1, 9—11 (англ.)

Трехстрочным латинским прямоугольником, образованным n элементами, называется матрица, имеющая 3 строки и n столбов, причем каждая из строк матрицы есть перестановка этих n элементов и в каждом из n столбцов все элементы разные. Латинский прямоугольник называется приведенным, если в его верхней строке элементы находятся в нормальном порядке. Исследуется количество K_n приведенных трехстрочных латинских прямоугольников, образованных n элементами.

Доказываются сравнения

$$\triangle^r K_n \equiv 0 \pmod{m^r}, \quad \triangle^r k_n \equiv 0 \pmod{m^r}$$

для любых целых положительных m и r. Здесь k_n определяется рекуррентной формулой

$$k_0 = 1, \quad k_n + nk_{n-1} = -(n-1)\,2^n,$$

а $\triangle^r K_n$ и $\triangle^r k_n$ — «m-разности» r-го порядка, определяемые рекуррентно:

$$\triangle f(n) = f(n+m) - 2^m f(n), \quad \triangle^s f(n) = \triangle\triangle^{s-1} f(n).$$

Для доказательства используется формула Риордана (Riordan J., Amer. Math. Monthly, 1952, **59**, № 3, 159—162)

$$K_n = n^2 K_{n-1} + n(n-1) K_{n-2} + 2n(n-1)(n-2) K_{n-3} + k_n.$$

А. В. Малышев

1054. Вычисление больших простых чисел. Райт (The calculation of large primes. Wright E. M.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 320, 104—106 (англ.)

Пусть $n = kp^b + 1$ и пусть $2^k \not\equiv 1$, $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, тогда при $b = 1$ или $b = 2$ и при $k < p$ число n будет простым.

Автор разбирает случай $b = 3$ и доказывает, что в этом случае для того, чтобы n было простым числом, должны быть выполнены еще следующие условия: k — четное число, не равное полному кубу и $k < 2\sqrt{2p+2} - 2$.

Устанавливается, что полученная оценка числа k не может быть улучшена, так как при $k = 2\sqrt{2p+2} - 2$ число n может быть составным. Например, $6 \cdot 7^3 + 1 = 29 \cdot 71$. *В. Д. Подсыпанин*

1055. Заметка по теории чисел. Тебо (A note on number theory. Thébault Victor), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 5, 322—323 (англ.)

Доказывается, что если $2m + 1$ простое число и $m > 2$, то в случае, когда abc не делится на $2m+1$, равенство

$$[k(2m+1) - 1]\, a^m = b^m + c^m$$

невозможно ни при каком целом k. В частности, при $k = 0$ получается особо выделенное автором утверждение относительно проблемы Ферма.

В. Д. Подсыпанин

1056. О числах Босе. Мисра (On Bose numbers. Misra B.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 5, 319—322 (англ.)

Дается новый метод разложения обыкновенной дроби в десятичную. Особо разбирается случай, когда знаменатель дроби взаимно прост с десятью. По количеству вычислений новый метод мало отличается от обычного. *В. Д. Подсыпанин*

1057. Видоизменение решета Эратосфена. Гаррис (A modification of the sieve of Eratosthenes. Harris V. C.), Amer. Math. Monthly, 1953, 60, № 5, 325—326 (англ.)

Предлагается следующее видоизменение решета Эратосфена: сначала перечеркиваются все числа; затем все числа, делящиеся на 2, на 3, на 4 и т. д. Число перечеркиваний, например, равно числу делителей перечеркнутого числа. *В. Д. Подсыпанин*

1058. Цепные дроби. Куджани (Le frazioni continue. Cugiani M.), Period. mat., 1953, сер. 4, **31**, № 1, 44—61 (итал.)

Элементарное изложение основ теории бесконечных цепных дробей. *А. Я. Хинчин*

1059. Решение уравнения $x^n + y^n = M$ и последняя теорема Ферма. Бинни (La risoluzione delle equazioni $x^n + y^n = M$ e l'ultimo teorema di

Fermat. Bini Umberto), Archimede, 1953, 5, № 2, 49—53 (итал.)

1060. Элементы теории чисел. Русу (Elemente de teoria numerelor. Rusu Eugen), Gaz. mat. şi fiz., 1953, 5, № 5, 215—225 (рум.)

Сравнения. Теорема Вильсона. Группа вычетов по простому модулю. Функция Эйлера. *Ю. В. Линник*

1061 К. Основы теории чисел. Виноградов И. М., изд. 6-е, исправленное, 180 стр., ГИТТЛ, М.— Л., 1953, 4 р. 65 к.

Книга состоит из 6 глав, к каждой из которых имеются вопросы и численные примеры.

Глава I. Теория делимости. Излагаются основные понятия, алгорифм Евклида, непрерывные дроби. Вопросы в конце главы позволяют читателю самостоятельно разобрать такие темы как ряд Фари, бесконечность простых чисел вида $4m + 3$ и $6m + 5$, диофантово уравнение $x^4 + y^4 = z^2$ и др.

Глава II. Важнейшие функции, встречающиеся в теории чисел. Излагаются свойства функций $[x]$, $\{x\}$, $\mu(x)$, $\varphi(x)$, $\tau(x)$. В вопросах читатель самостоятельно знакомится со счетом целых точек в контурах, формулой Сонина, многими результатами П. Л. Чебышева в теории простых чисел, простейшими свойствами ζ-функции, сумматорными формулами Виноградова, обобщающими формулу обращения Дедекинда. Предлагаются некоторые задачи из асимптотической геометрии чисел и теории решета Эратосфена.

Глава III. Сравнения. Излагаются основные понятия теории сравнений, теорема Ферма. Далее следуют вопросы, касающиеся суммирования дробных частей значений функции целого аргумента и дающие читателю представление об элементарных методах И. М. Виноградова для счета целых точек в контурах. Есть также вопросы, содержащие элементы теории тригонометрических сумм.

Глава IV. Сравнения с одним неизвестным. В вопросах дается, в частности, приложение тригонометрических сумм к теории сравнений.

Глава V. Сравнения второй степени. Основным содержанием главы является теория квадратичных вычетов, символы Лежандра и Якоби, закон взаимности. В вопросах трактуется применение символов Лежандра в теории чисел, включая новейшие результаты И. М. Виноградова о двойных суммах вида

$$S = \sum_{x,\ y} \left(\frac{xy + k}{p} \right),$$

разложение простых чисел $p \equiv 1 \pmod 4$ на два квадрата, оценки сумм Гаусса и др.

Глава VI. Первообразные корни и индексы. В вопросах трактуются суммирование значений характеров, тригонометрические суммы, связанные с характерами, величина наименьшего невычета n-ой степени и другие задачи.

К книге приложены подробные решения вопросов, ответы к численным примерам, таблицы индексов для простых чисел меньших 100, таблица простых чисел меньших 4000 и их наименьших первообразных корней.

Текст книги может служить руководством по теории чисел для студентов старших курсов физико-математических факультетов; решение задач в ней — введением в углубленное изучение теории чисел для аспирантов и молодых специалистов, изучающих теорию чисел. *Ю. В. Линник*

1062 РЕЦ. Избранные труды. Виноградов И. М., 436 стр., Изд-во АН СССР, М., 1952, 21 р. 70 к. [**Рецензия: Чудаков Н. Г.**, Сов. книга, 1953, № 6, 29—30]

1063 РЕЦ. Теория римановой дзета-функции. Титчмарш (The theory of the Riemann zeta-function. Titchmarch E. C., pp. 346, Oxford, Clarendon press, 1951) [**Рецензия: Гельфонд А.**, Новые книги за рубежом, 1953, № 4, 39—40]

1064 РЕЦ. Введение в современную теорию простых чисел. Эстерман (Introduction to modern prime number theory. Estermann T., pp. 10 + 75, Cambridge University Press, 1952, 2.50 doll.) [**Рецензии: Шёнфелд** (Schoenfeld Lowell), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 3, 255—258; (E. M. W.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 320, 146 (англ.)]

1065 РЕЦ. О числе классов абелевых алгебраических полей. Хассе (Über die Klassezahl abelscher Zahlkörper. Hasse Helmut, Berlin, Akademie, 1952) [**Рецензия: Шевалле** (Chevalley C.), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 3, 281—282 (англ.)]

В книге изучается при помощи разложения на множители дзета-функции поля $\zeta_K(s)$ число классов h произвольного абелева поля K.

Ю. В. Линник

1066 РЕЦ. Теория чисел. Стюарт (Theory of numbers. Stewart B. M., S. 261, N. Y., The Macmillan Company, 1952, 5.50 doll.) [**Рецензия: Хёльдер** (Hölder E.), Forsch, Gebiete Ingenieurwesens, Ausgabe B., 1953, **19**, № 1, 29 (нем.)]

1067 Д. О целочисленных преобразованиях неопределенной тройничной квадратичной формы в себя. Симакова Э. Е. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Ленингр. гос. пед. ин-т, Л., 1953

1068 Д. Об арифметических свойствах показательных функций. Коробов Н. М. Автореф. дисс. докт. физ.-мат. н., Матем. ин-т им. Стеклова, М., 1953

См. также: 1011, 1015, 1019 **РЕЦ**, 1034 **Д**, 1075, 1094, 1097, 1113, 1424

АЛГЕБРА

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1069 РЕЦ. Специальный курс элементарной алгебры. Новоселов С. П., Гос. изд-во «Советская наука», 1951 [**Рецензия: О книге С. Новоселова «Специальный курс элементарной алгебры». Будак Б. М.**, Математика в школе, 1953, № 4, 72—77]

1070. Элементарное доказательство основной теоремы алгебры в действительной области. Мор (Ein elementarer Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra in Reellen. Mohr Ernst),

Ann. mat. pura ed appl., 1953, cep. 3, **34**, 407—410 (нем.)

Дается доказательство в стиле курса анализа теоремы о разложении многочлена с действительными коэффициентами на линейные и квадратичные множители. Это доказательство трудно признать элементарным, так как в нем используются такие понятия, как результант, якобиан, неявные функции и т. п. *В. М. Курочкин*

1071. О нулях многочленов и степени устойчивости линейных систем. К ё н и г (On the zeros of polynomials and the degree of stability of linear systems. K o e n i g J. F r a n k), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 4, 476—482 (англ.)

Критерий устойчивости физической линейной системы, описываемой линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами состоит в том, чтобы все корни характеристического многочлена лежали в левой полуплоскости. Степень устойчивости характеризуется наименьшим расстоянием корней до мнимой оси. В реферируемой статье с этой точки зрения исследуются вопросы расположения корней многочленов с вещественными коэффициентами.

Работа не содержит никаких новых результатов. Некоторые теоремы (9 и 10) входят в курс средней школы. Рассуждение и утверждение автора в пунктах (*b*) и (*c*), относящихся к теореме 8, неверны. В действительности пунктам (*b*) и (*c*) соответствует в пространстве коэффициентов $(n-1)$-мерное многообразие. В примере (7) случаю (*b*) соответствует $c_1 = 0$, $c_2 < 0$. *Н. Н. Мейман*

1072. Матрицы *AB* и *BA*. П а р к е р (The matrices *AB* and *BA*. P a r k e r W. V.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 5, 316 (англ.)

Дается простое доказательство того, что матрицы AB и BA имеют одинаковые характеристические уравнения. Предполагается, что поле коэффициентов содержит достаточное количество элементов.

1073. Характеристические числа некоторой совокупности матриц. П а р к е р (Characteristic roots of a set of matrices. P a r k e r W. V.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 4, 247—250 (англ.)

Известно, что все собственные числа произвольной квадратной матрицы A с комплексными элементами лежат внутри или на сторонах прямоугольника L, вершины которого определяются комплексными числами $\alpha + i\beta$, $\alpha' + i\beta$, $\alpha + i\beta'$, $\alpha' + i\beta'$, где α и β наименьшие, а α' и β' наибольшие характеристические числа «эрмитовых компонент» матрицы A, т. е. эрмитовых матриц H и K, для которых $A = H + iK$ (см. Bromwich, Acta Math., 1906, **30**, 295—304).

Совокупность всех матриц B, которым соответствует общий с матрицей A прямоугольник, определяется формулой $B = UHU^* + iVKV^*$, где U и V — унитарные матрицы. В реферируемой работе доказывается, что если матрицы H и K имеют порядок n и их характеристические полиномы равны, соответственно, $(x-c)(x-a)^{n-1}$ и $(x-d)(x-b)^{n-1}$, то всякая матрица B имеет собственное число $a+ib$ кратности $n-2$, а два остальных собственных числа определяют концы диаметра равнобочной гиперболы, проходящей через точки $a+ib$, $a+id$, $c+ib$, $c+id$. *А. М. Лопшиц*

1074. Разложение нормы матрицы по произведениям норм ее строк. Ц и м м е р м а н (Розклад норми матриці по добутках норм її рядків. Ц і м м е р м а н Г. К.), Наукови зап. Миколаївського держ. пед. ін-ту, 1953, № 4, 130—135 (укр.)

Нормой прямоугольной $(m \times n;\ m \leqslant n)$ матрицы $A = \| a_{ik} \|$ автор называет определитель $|AA^*|$, где A^* — комплексно-сопряженная транспонированная матрица для A; через c_{ij} обозначается «скалярное произведение» i-ой строки на j-ую:

$$c_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}\overline{a}_{j\alpha}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n;$$

c_{ii} называется нормой i-ой строки. В статье устанавливается алгебраическое тождество, в котором норма матрицы выражается через элементы матрицы и „произведения“ c_{ij} при помощи определителей порядка $\leqslant m$. Из этого тождества сразу получаются известное неравенство Адамара для модуля определителя и некоторые его обобщения. *Ф. Р. Гантмахер*

1075. Одно неравенство для матриц Минковского. В а н (An inequality for Minkowski matrices. W o n g Y. K.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 1, 137—141 (англ.)

Даются две новые оценки модуля определителя матриц класса Минковского, т. е. матриц вида $\delta - a$, где δ — единичная матрица, а элементы $a(i, j)$ матрицы a удовлетворяют условиям

$$s^{(n)}(j) = \sum_{i=1}^{n} |a(i, j)| \leqslant 1, \quad |a(j, j)| < 1 \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Оценки эти таковы:

$$[|1 - a(n, n)| - N^{(n)}] \cdot |D_{n-1}| \leqslant |D_n| \leqslant [|1 - a(n,n)| + N^{(n)}] \cdot |D_{n-1}|,$$

$$(|S_m^{(n)}| - P_m^{(n)}) \cdot |D_{n-1}| \leqslant |D_n| \leqslant (|S_m^{(n)}| + P_m^{(n)}) \cdot |D_{n-1}|.$$

Здесь $D_n = \det(\delta - a)$, D_{n-1} — определитель матрицы $\delta - a_{n-1}$, полученной из $\delta - a$ вычеркиванием последних строки и столбца,

$$N^{(n)} = \sum_{<n} s^{(n)}(j) \cdot |a(j, n)|,$$

$$S_m^{(n)} = 1 - a(n, n) - \sum_{n} a(n, i) \sum_{k=0}^{m} a_{n-1}^{k}(i, j)\, a(j, n),$$

$$P_m^{(n)} = \sum_{i<n} s^{(n)}(i) \cdot \Big| \sum_{j<n} a_{n-1}^{m+1}(i, j)\, a(j, n) \Big|$$

и $a_{n-1}^{k} = (a_{n-1}^{k}(i, j))$.

Левые части этих неравенств неотрицательны. В применении к матрицам с доминирующей главной диагональю эти оценки несколько лучше оценок, данных Прайсом (Price G. B., Proc. Amer. Math. Soc., 1951, **2**, 497—502) и Островским (Ostrowski A. M., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, 26—30). *В. В. Морозов*

1076 **РЕЦ.** **Теория уравнений. Тернбулл** (Theory of equations. Turnbull H. W., pp. 166, 5-th ed., N. Y., Interscience Publischers, Inc., 1952, 6 s.) [**Рецензия:** Trans. Inst. Marine Engrs, 1953, **65**, № 5, 7 (англ.)]

1077 **РЕЦ.** **Теория матриц. Перлис** (Theory of matrices. Perlis Sam, pp. 237, 5 figs, Cambridge, Mass., Addison-Wesley Press, Inc., 1952, 5.50 doll.) [**Рецензии: Брак** (Bruck R. H.), Science, 1953, **117**, № 3042, 420—421; (G. W. C. H), J. Instn. Engrs Australia, 1953, **25**, № 1—2, 25 (англ.)]

1078 **РЕЦ.** **Матрицы. Цурмюль** (Matrizen. Zurmühl Rudolf, eine Darstellung für Ingenieure, S. 427, 25 Abb., Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1950, SFr 29.25) [**Рецензия: Бешлин** (Baeschlin F.), Schweiz. Z. Vermessung, 1953, **51**, № 4, 119—120 (нем.)]

1079 **РЕЦ.** **Квадратичные формы и ортогональные группы. Эйхлер** (Quadratische Formen und orthogomale Gruppen. Eichler M., S. 220, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1952) [**Рецензия: Прахар** (Prachar K.), Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 25/26, 38 (нем.)]

1080 **Д.** **Рациональный базис ковариантов n-арной формы. Ларионов Б. А.** Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Среднеазиатский гос. ун-т, Ташкент, 1953

ГРУППЫ

1081. **Подгруппы свободного произведения. Холл** (Subgroups of free products. Hall Marshall, Jr.), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 1, 115—120 (англ.)

Дается новое доказательство теоремы Куроша о подгруппах свободного произведения, значительно более простое, чем известные ранее.

А. И. Узков

1082. **Об изоморфизме центров групповых колец p-групп. Берман С. Д.**, Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 2, 185—187

Автор называет K-отделом конечной группы G множество ее элементов вида $c^{-1}a^{\mu}c$; здесь a — заданный, а c — произвольный элемент группы G, μ — любое целое число, для которого соответствие $\varepsilon \to \varepsilon^{\mu}$ является автоморфизмом поля характеров $K(\varepsilon)$ над K (ε — корень из единицы). K-отдел, таким образом, состоит из нескольких классов сопряженных элементов.

Доказывается, что необходимым и достаточным условием изоморфизма центров групповых колец над K двух p-групп (при $p \neq 2$) является существование такого соответствия между их K-отделами, при котором соответствующие K-отделы содержат одинаковое число классов.

В частности, в применении к абелевым p-группам находится необходимое и достаточное условие изоморфизма групповых колец двух групп (имеющее место при любом p); этим условием является наличие такого соответствия между K-отделами этих групп, при котором соответствующие K-отделы содержат одинаковое число элементов.

Ставится общая проблема: найти все группы, групповое кольцо которых изоморфно групповому кольцу данной группы G над данным полем K.

И. Д. Адо

1083. **Теорема о базисе конечных абелевых групп. IV. Дуглас** (On the basis theorem for finite abelian groups: IV. Douglas Jesse), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 4, 307—310 (англ.)

Дается еще одно доказательство существования базиса любой конечной абелевой группы.

А. И. Мишина

1084. **Конечные группы с образующими A, B, C, удовлетворяющими соотношениям $A^a = B^b = C^c = ABC = 1$. Эст** (Eindige groepen met voortbrengenden A, B, C en relaties $A^a = B^b = C^c = ABC = 1$. Est W. T. van), Nieuw arch. wiskunde, 1953, **1**, № 1, 16—26 (голл.)

Дан новый, основанный на геометрической интерпретации, способ нахождения всех типов конечных групп, порождаемых элементами $A_1, A_2, \ldots, A_n$, удовлетворяющими соотношениям

$$A_1^{\alpha_1} = A_2^{\alpha_2} = \ldots = A_n^{\alpha_n} = A_1 A_2 \ldots A_n = 1.$$

В. К. Туркин

1085. **Группа коллинеаций порядка $2^{13} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$. Хеймилл** (A collineation group of order $2^{13} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$. Hamill Christine M.), Proc. London Math. Soc., 1953, сер. 3, **3**, № 9, 54—79 (англ.)

Исследуется группа $\mathfrak{G}^7$ порядка $2^{13} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$ коллинеаций в пространстве семи измерений, изоморфная группе автоморфизмов 120 тритангенциальных плоскостей пространственной кривой шестого порядка и рода 4. Для этой группы выведены все типы элементов и дано разбиение этих элементов на классы сопряженных.

Аналогичные результаты приведены для группы $\mathfrak{G}^5$ порядка $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$, изоморфной группе автоморфизмов 27 линий на кубической поверхности, и для группы $\mathfrak{G}^6$ порядка $2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$, изоморфной группе автоморфизмов 28 двойных касательных плоской кривой четвертого порядка.

В. К. Туркин

1086. **О метрических представлениях групп. Эллис** (On metric representations of groups. Ellis David), Math. Mag., 1953, **26**, № 4, 183—184 (англ.)

Доказывается, что любая конечная или счетная группа изоморфна подгруппе группы движений (т. е. изометричных преобразований) метрического пространства Бэра.

М. И. Граев

1087. **Автокорреляция и квадратичный спектр функции, определенной на абелевой локально компактной группе. Кампе де Ферье** (Autocorrélation et spectre quadratique d'une fonction définie sur un groupe abélien localement compact. Kampé de Fériet Joseph), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 23, 2198—2200 (франц.)

На абелевой локально компактной группе G рассматриваются функции $f(x)$, которые отличны от нуля на множестве положительной меры (относитель-

но меры Хаара μ) и имеют суммируемый квадрат на любом компактном подмножестве $K \subset G$.

Выражение

$$\left\{\int_G f_k(x+a)\,\overline{f_k(x+b)}\,d\mu\right\}\left\{\int_G |f_k(x)|^2\,d\mu\right\}^{-1}$$

где $f_k(x) = f(x)$ на K и равно 0 на $G-K$, зависит лишь от разности $h = b - a$ и обозначено автором через $\rho(h \mid f_k)$. ρ является непрерывной положительно определенной функцией от h. Пусть $S^2(G)$—множество функций $f(x)$, для которых предел $\lim_{K \to G} \rho(h \mid f_k)$ существует и является непрерывной функцией от h при $h=0$. Этот предел обозначен через $\rho(h \mid f)$ и назван автокорреляцией функции f. Автокорреляция функции из $S^2(G)$ является непрерывной положительно определенной функцией на G, причем $\rho = (0 \mid f) = 1$, $|\rho(h \mid f)| \leqslant 1$, $\rho(-h \mid f) = \overline{\rho(h \mid f)}$.

Для каждой функции $f \in S^2(G)$ существует мера $\sigma(A \mid f)$, определенная на группе $\hat{G}$, двойственной G, $0 \leqslant \sigma(A \mid f) \leqslant \sigma(\hat{G} \mid f) = 1$, такая, что

$$\rho(h \mid f) = \int_{\hat{G}} \chi(h, \xi)\,d\sigma,$$

где $\chi(h, \xi)$, $h \in G$, $\xi \in \hat{G}$, — характеры. Для аддитивной группы R вещественных чисел это дает:

$$\rho(h \mid f) = \lim_{T \to \infty} \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(x+a)\,\overline{f_T(x+b)}\,dx\right\} \times \left\{\int_{-T}^{T} |f(x)|^2\,dx\right\}^{-1}$$

(T — интервал: $|x| \leqslant T$);

$$\rho(h \mid f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\,dS(\xi \mid f),$$

где $S(\xi \mid f)$ — ограниченная монотонная неубывающая функция на R. $S^2(R)$ включает в себя класс функций L^2 и класс S Винера. В то же время $S^2(R)$ значительно шире, чем S, так как на характер роста интеграла

$$\int_{-T}^{T} |f(x)|^2\,dx$$

не налагается никаких ограничений. В качестве частного случая рассматривается также аддитивная группа целых чисел. *М. И. Граев*

1088. Двойственные модули над нормированным кольцом. I. Каплански (Dual modules over a valuation ring. I. Kaplansky Irving), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 2, 213—219 (англ.)

Пусть R — топологическое кольцо. Топологический R-модуль M называется линейно компактным, если: а) он обладает системой окрестностей нуля, состоящей из подмодулей, и б) пересечение любой центрированной системы смежных классов по замкнутым подмодулям непусто.

Пусть R — полное дискретно нормированное кольцо (т. е. R — область целостности, полная относительно топологии, задаваемой степенями $(p)^n$ простого идеала (p)), K — его поле отношений и R_0 — модуль K/R. Двойственным к M называется R-модуль M^*, состоящий из непрерывных гомоморфизмов M в R_0 (здесь R_0 дискретно). Линейно компактный R-модуль M совпадает с M^{**}, где M^* берется в дискретной топологии, а M^{**} — в слабой топологии, индуцированной M^*. Отсюда вытекают некоторые результаты Крулля о сепарабельных группах (Krull W., J. reine und angew. Math., 1942, **184**, 19—48). Указаны связи с работами референта по косепарабельным и слабо сепарабельным группам и с теорией локально компактных примарных абелевых групп (Виленкин Н. Я., Мат. сб., 1946, **19 (61)**, 85—154, 311—340; 1948, **22 (64)**, 135—177). *Н. Я. Виленкин*

1089. Теория обобщенных груд и обобщенных групп. Вагнер В. В., Мат. сб., 1953, **32 (74)**: 3, 545—632.

Множество K с определенной в нем тернарной операцией $[k_1\ k_2\ k_3]$ называется полугрудой, если

$$[[k_1k_2k_3]\ k_4k_5] = [k_1\ [k_2k_3k_4]\ k_5] = [k_1k_2\ [k_3k_4k_5]].$$

Добавление условия типа коммутативности определяет некоторый класс полугруд, называемых обобщенными грудами. В реферируемой работе изучаются различные свойства полугруд, в частности, их гомоморфизмы.

Значение понятия полугруды объясняется следующим образом. Пусть заданы два множества A и B. Отображение (необязательно однозначное) подмножества $A' \subset A$ в множество B называется бинарным отношением для A и B. Если ρ_1 — бинарное отношение для A и B, а ρ_2 — бинарное отношение для B и C, то результат последовательного применения сначала ρ_1, потом ρ_2 дает бинарное отношение для A и C, называемое произведением бинарных отношений ρ_1 и ρ_2. Под ρ_1^{-1} понимается бинарное отношение B и A, при котором $\rho_1^{-1}(b) \ni a$ ($a \in A$, $b \in B$) имеет место тогда и только тогда, когда $\rho_1(a) \ni b$. Множество всех бинарных отношений для A и B оказывается полугрудой относительно следующей тернарной операции: $[\rho_1\rho_2\rho_3] = \rho_1 \circ \rho_2^{-1} \circ \rho_3$.

Если A совпадает с B, то множество всех бинарных отношений для A и A является полугруппой. Эта полугруппа обладает обратным автоморфизмом $\rho \to \rho^{-1}$.

Если в произвольной полугруппе G задан обратный автоморфизм $g \to \bar{g}$, то в G определяется тернарная операция

$$[g_1g_2g_3] = g_1\bar{g}_2^{-1}g_3,$$

относительно которой G будет полугрудой. Каждая полугруда может быть дополнена до полугруды, получаемой таким способом из некоторой полугруппы.

Если все идемпотентные элементы полугруппы коммутируют между собой и для каждого элемента g найдется такой элемент $\bar{g}$, что $g\bar{g}g = g$, $\bar{g}g\bar{g} = \bar{g}$, то полугруппа называется обобщенной группой. Отношение $g \to \bar{g}$ является в этом случае обратным автоморфизмом.

Каждая обобщенная группа относительно указанной выше тернарной операции является обобщенной грудой. В свою очередь каждая обобщенная груда может быть дополнена до обобщенной группы.

Совокупность всех взаимно однозначных частичных отображений одного множества в другое является обобщенной грудой. Каждая обобщенная груда в свою очередь обладает собственным (т. е. точным) представлением при помощи взаимно однозначных частичных отображений.

Полугруппа всех частичных взаимно однозначных преобразований некоторого множества является обобщенной группой и всякая обобщенная группа допускает собственное представление при помощи взаимно однозначных частичных преобразований.

Важным примером обобщенных групп являются так называемые бесконечные группы преобразований Ли в арифметическом пространстве, определяемые при помощи функций, являющихся решением данной определяющей системы дифференциальных уравнений в частных производных. К группам они не сводятся.

Автором рассмотрены многочисленные свойства введенных им понятий, в частности, доказано, что в обобщенной груде всех взаимно однозначных частичных отображений частичная упорядоченность этих отображений может быть вполне определена при помощи тернарной операции.

Е. С. Ляпин

1090. О логарифмиках квазигрупп с единицей. Попова (Sur la logarithmétique d'une boucle. Popova Hélène), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 12, 1220—1222 (франц.)

Рассматриваются единицы относительно операции сложения в логарифмиках (см. РЖМат, 1953, реф.100) конечных квазигрупп. Логарифмика с одним образующим, имеющая мультипликативную единицу, имеет и аддитивную единицу. Если Q — квазигруппа с одним образующим и с единицей, то логарифмика $L_Q(+)$ имеет однозначно определенную единицу. Если Q — квазигруппа и $L_Q(+)$ имеет единицу, то: 1) Q имеет единицу или же 2) Q является объединением попарно непересекающихся множеств, каждое из которых является объединением квазигрупп с общей единицей. *Ю. И. Соркин*

1091 РЕЦ. Симметрия. Вейль (Symmetry.Weyl H., pp. 168, London. Princeton University Press, 24 s.) [**Рецензии:** (D. P.), Philos. Mag., 1953, **44**, № 353, 675; **Ролинс** (Rawlins F. I. G.), Nature, 1953, № 4363, 1037—1038 (англ.)]

1092 РЕЦ. Теория групповых характеров и матричных представлений групп. Литлвуд (The theory of group characters and matrix representations of groups. Littlewood D. E., 2-nd ed., pp. 310, University Press, Oxford, 1950) [**Рецензия: Прахар** (Prachar K.), Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 25/26, 45—46 (нем.)]

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

1093. О понятии поля. Дюбрей (Sur la notion de corps. Dubreil M.), Rev. math. spéc., 1953, **63**, № 10, 517—521 (франц.)

Обзор простейших свойств полей и доказательство существования корня уравнения n-ой степени в некотором расширении поля. *Е. Г. Шульгейфер*

1094. О кольце функций, заданных на метриках. Ивасава (On the rings of valuation vectors. Iwasawa Kenkichi), Ann. Math., 1953, **57**, № 2, 331—356 (англ.)

Пусть K есть поле алгебраических чисел или поле алгебраических функций над конечным полем констант. Функцией, заданной на метриках, называется функция $f(P)$, определенная на множестве всех неэквивалентных метрик P поля K, значение которой $f(P)$ есть элемент пополнения K по метрике P, причем только для конечного числа P значение $f(P)$ может не быть целым (если P — неархимедова метрика). Такие функции образуют при обычном определении действий кольцо R, причем поле K естественным образом изоморфно отображается на подкольцо R. Кольцо R содержит подкольцо O функций, значения которых на неархимедовых метриках целые (а на архимедовых — произвольные).

В R однозначно вводится топология, в которой O открыто и является тихоновским произведением подколец O_P, состоящих из функций, принимающих значение 0 на всех $Q \neq P$ и целое значение в P, если P есть неархимедова метрика (любое значение в противном случае).

Основным результатом работы является характеристика кольца R как топологического кольца. Доказывается, что R обладает следующими свойствами: 1) R полупросто, коммутативно и содержит единицу; 2) R локально компактно, но ни компактно, ни дискретно; 3) R содержит дискретное подполе K, единица которого совпадает с единицей R, а пространство R/K компактно; и что, наоборот, всякое топологическое кольцо, обладающее этими свойствами, может быть построено указанным выше способом.

Аналогичная задача решается для поля алгебраических функций с произвольным полем констант. Приводятся также доказательства некоторых известных теорем (леммы Минковского, теоремы о конечности числа классов, теоремы Дирихле о единицах, теоремы Римана—Роха), использующие топологические свойства кольца R. Эти доказательства по идеям близки к общеизвестным.

И. Р. Шафаревич

1095. Риманова гипотеза для функциональных полей. Рокетт (Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern. Roquette Peter), Arch. Math., 1953, **4**, № 1, 6—16 (нем.)

Так называемая риманова гипотеза о корнях ζ-функции поля алгебраических функций над конечным полем констант была в общем виде впервые доказана А. Вейлем на основе развитой им «геометрической» теории алгебраических соответствий (Act. Scient. Ind., 1948, № 1041). Автор реферируемой работы излагает схему доказательства, по идее близкого к вейлевскому, но опирающегося на «арифметическую» теорию алгебраических соответствий Дейринга (Deuring M., J. reine und angew. Math., 1937, **177**, 166—191; 1942, **183**, 20—35). По поводу деталей доказательства автор отсылает к последующей публикации. *А. И. Узков*

1096. Дифференциалы второго рода полей алгебраических функций одной переменной. Розенлихт (Differentials of the second kind for algebraic function fields of one variable. Rosenlicht Maxwell), Ann. Math., 1953, **57**, № 3, 517—523 (англ.)

Пусть R — поле алгебраических функций одной переменной над полем констант K. Дифференциал ω поля R называется дифференциалом второго рода, если для любой точки $\mathfrak{P}$ поля R найдется такая функция $f_{\mathfrak{P}}$, для которой $\omega - df_{\mathfrak{P}}$ конечен в $\mathfrak{P}$ (в смысле конечности дифференциалов). Для полей характеристики нуль это определение сводится к обычному.

Доказывается следующая теорема:

Если род поля R равен g, то размерность фактор-модуля дифференциалов второго рода по модулю точных дифференциалов равна: $2g$ в случае полей характеристики нуль; g в случае полей характеристики не равной нулю, за исключением случая, когда R сепарабельно порождаемо над K и его род понижается при надлежащем расширении поля констант. В последнем случае размерность указанного фактор-модуля меньше g.

Отсюда вытекает, в частности, что дифференциал второго рода, в любой точке и с любой точностью приближаемый точным дифференциалом, сам будет точным дифференциалом (Teichmuller O., J. reine und angew. Math., 1936, 175).

В заключение доказывается, что дифференциалы второго рода остаются такими же после применения к ним операций взятия следа и коследа в смысле Шеваллея (Chevalley C., Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, Math. Surveys, 1951, 6). *А. И. Узков*

1097. Общая теория гауссовых сумм в конечных коммутативных кольцах. Л а м п р е х т (Allgemeine Theorie der Gaussschen Summen in endlichen kommutativen Ringen. L a m p r e c h t E r i c h), Math. Nachr., 1953, 9, № 3, 149—196 (нем.)

Пусть R — конечное коммутативное кольцо с единицей и $\mathfrak{M}$ — мультипликативная группа его неделителей нуля. Если $\chi(\xi)$ — характер $\mathfrak{M}$, а $e[\xi]$ — характер аддитивной группы R, то выражение

$$\tau(\chi; e) = \sum_{\xi \in \mathfrak{M}} \chi(\xi)\, e[\xi]$$

называется гауссовой суммой в R. Характер $e[\xi]$ называется правильным, если характеры $e_\alpha[\xi] = e[\alpha\xi]$ исчерпывают все характеры аддитивной группы R, когда α пробегает R. Характер $\chi(\xi)$ называется собственным, если единственным идеалом $\mathfrak{q}$ в R, обладающим тем свойством, что $\chi(\xi) = 1$ для всех $\xi \equiv 1\ (\mathfrak{q})$, является нулевой идеал. Если e — правильный, а χ — собственный характер, то гауссова сумма называется правильной и собственной. Наконец, R называется неприводимым, если оно не может быть разложено в прямую сумму колец.

Путем ряда редукций автор выражает произвольные гауссовы суммы через правильные собственные гауссовы суммы в неприводимых кольцах. Для последних определяется квадрат модуля — он оказывается равным числу элементов в R. В случае, когда R есть конечное поле, точные значения правильных собственных гауссовых сумм определены Штикельбергером (см. Davenport H., Hasse H., J. reine und angew. Math., 1934, 172, 151—182).

Автор решает аналогичную задачу для неприводимых колец R, причем в некоторых случаях значения гауссовых сумм выражаются прямо через некоторые инварианты R, e и χ, в других же — через гауссовы суммы в конечном поле с квадратичным характером.

В случае, когда поле классов вычетов R по максимальному идеалу имеет характеристику 2, вместо гауссовых сумм в конечном поле с квадратичным характером χ появляются некоторые новые суммы. Автор вычисляет значения этих сумм и доказывает, что, аналогично тому, что имеет место при характеристике не равной 2, они являются корнями ζ-функций некоторых полей алгебраических функций с конечным полем констант.

Свойства гауссовых сумм в общем кольце R применяются к кольцу классов вычетов кольца целых алгебраических чисел, целых алгебраических функций над конечным полем констант и целых чисел неразветвленного расширения поля p-адических чисел. В частности, показывается, что множители, фигурирующие в функциональном уравнении для L-рядов в поле алгебраических функций с конечным полем констант, являются гауссовыми суммами. *И. Р. Шафаревич*

1098. О числе упорядочений поля. К л и н г е н б е р г (Sopra il numero degli ordinamenti di un corpo. K l i n g e n b e r g W i l h e l m), Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, 14, № 3, 395—396 (итал.)

Доказана теорема: Пусть K — поле, допускающее только архимедовы упорядочения. Пусть K^* — мультипликативная группа поля K, а Q^* — подгруппа, состоящая из элементов, которые могут быть выражены в виде суммы квадратов. Если число различных возможных упорядочений поля K равно $n(\geqslant 1)$, то индекс Q^* относительно K^* равен 2^n и обратно. Формулировка остается справедливой и в случае $n = 0$, т. е. когда K не может быть упорядочено. *В. К. Туркин*

1099. Конечные мультипликативные подгруппы в телах. Х е р с т е й н (Finite multiplicative subgroups in division rings. H e r s t e i n I. N.) Pacif. J. Math., 1953, 3, № 1, 121—126 (англ.)

Известно, что конечные подгруппы мультипликативной группы отличных от нуля элементов поля являются циклическими. Автор доказывает, что в теле конечной характеристики такие подгруппы также цикличны. В теле характеристики нуль конечные подгруппы нечетного порядка либо цикличны, либо метациклични.

В теле кватернионов над полем действительных чисел конечные подгруппы нечетного порядка цикличны, однако там существует некоммутативная группа порядка 8: $G = (\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k)$. *В. М. Курочкин*

1100. О коммутативности некоторых тел. Н а к а я м а (On the commutativity of certain division rings. N a k a y a m a T a d a s i), Canad. J. Math., 1953, 5, № 2, 242—244 (англ.)

Доказывается следующая теорема, обобщающая результаты Джекобсона (Jacobson N., Ann. Math., 1945, 46, 695—707), Хуа (Hua L. K., Proc. Nat. Acad. U. S. A., 1949, 35, 533—537), Капланского (Kaplansky I., Canad. J. Math., 1951, 3, 290—292), Икеда (Ikeda M., Osaka Math. J., 1952, 4, 235—240) и Краснера (РЖМат, 1953, реф. 702):

Пусть A — тело с центром Z и пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ — фиксированные неравные нулю элементы из

Z. Если для каждого элемента a из тела A существуют такие натуральные числа $n_1, n_2, \ldots, n_r$ $(n_1 < n_i)$ что $\alpha_1 a^{n_1} + \alpha_2 a^{n_2} + \ldots + \alpha_r a^{n_r} \in Z$, то A коммутативно, т. е. $A = Z$. *B. M. Курочкин*

1101. Одна теорема о кольцах. Херстейн (A theorem on rings. Herstein I. N.), Canad. J. Math., 1953, 5, № 2, 238—241 (англ.)

Капланским (Kaplansky I., Canad. J. Math., 1951, **3**, 290—292) было доказано, что если в полупростом кольце R некоторая степень $x^{n(x)}$ любого элемента x лежит в центре Z, то R коммутативно. Автор дает следующее обобщение этого результата:

Если некоторая степень $x^{n(x)}$ каждого элемента кольца R содержится в центре Z и R некоммутативно, то коммутатор (т. е. идеал, порожденный всеми коммутаторами $[a, b] = ab - ba$) кольца R является нильидеалом. *B. M. Курочкин*

1102. Представления приведенных колец. Джонсон (Representations of prime rings. Johnson R. E.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **74**, № 2, 351—357 (англ.)

Продолжается изучение приведенных колец (ассоциативных колец, у которых нулевой элемент является простым идеалом), начатое автором ранее (Duke Math. J., 1951, **18**, 799—809). Правый (левый) идеал I приведенного кольца R называется простым, если из $\mathfrak{ab} \subseteq I$ следует $\mathfrak{a} \subseteq I$ $(\mathfrak{b} \subseteq I)$, где $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — правые (левые) идеалы из R и $\mathfrak{b} \neq 0$ $(\mathfrak{a} \neq 0)$; $\mathfrak{P}_r$ $(\mathfrak{P}_l)$ — множество всех простых правых (левых) идеалов.

Если A — непустое подмножество R, то правый (левый) идеал A^r (A^l), состоящий из всех элементов, аннулирующих справа (слева) множество A, называется аннулирующим идеалом; $\mathfrak{A}_r$ $(\mathfrak{A}_l)$ — множество всех правых (левых) аннулирующих идеалов. Для приведенного кольца R существует правая (левая) структура $\mathfrak{R}$ $(\mathfrak{L})$, если в нем можно определить отображение $I \to I^*$ множества всех правых (левых) идеалов в множество $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}_r$ $(\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}_l)$, удовлетворяющее условиям:

1) $I^* \supseteq I$; 2) $I^{**} = I^*$; 3) если $I \supseteq I'$, то $I^* \supseteq I'^*$; 4) $0^* = 0$; 5) если $I \cap I' = 0$, то $I^* \cap I'^* = 0$; 6) $aI^* \subseteq (aI)^*$ $(I^* a \subseteq (Ia)^*)$, $a \in R$; 7) в частично упорядоченном множестве $\mathfrak{R}$ $(\mathfrak{L})$ каждый элемент, отличный от нуля, содержит некоторый атом.

В упомянутой работе было показано, что $\mathfrak{A}_r \subseteq \mathfrak{R}$ $(\mathfrak{A}_l \subseteq \mathfrak{L})$ и что если в $\mathfrak{R}$ $(\mathfrak{L})$ ввести операцию $\bigcup$, определяемую $I \bigcup I' = (I + I')^*$, то $\mathfrak{R}$ $(\mathfrak{L})$ относительно этой операции и операции пересечения идеалов окажется дедекиндовой структурой.

Предполагается, что приведенное кольцо R имеет правую и левую структуры $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{L}$. Тогда: 1) если I — атом в $\mathfrak{R}$, то I^l является максимальным элементом в $\mathfrak{L}$; если I — максимальный элемент в $\mathfrak{R}$ и $I^l \neq 0$, то I^l — атом в $\mathfrak{L}$; 2) если I — атом в $\mathfrak{R}$ и $I' \in \mathfrak{A}_r$, то $I \bigcup I' \in \mathfrak{A}_r$.

Правый (левый) R-модуль называется приведенным, если каждый его подмодуль аннулируется только нулевым элементом. Правый (левый) R-модуль M называется допустимым, если он является приведенным и $(x)^r \in \mathfrak{R}$ $((x)^l \in \mathfrak{L})$ для каждого $x \in M$. Если для каждого подмодуля N правого допустимого R-модуля M определить замыкание $N^* = \{x;\ x \in M, [(N : x)]^* = R\}$, где $(N : x)$ — множество всех элементов $a \in R$, удовлетворяющих условию $xa \in N$, то отображение $N \to N^*$ обладает свойствами, аналогичными вышеперечисленным свойствам 1)—7). Аналогичное утверждение справедливо и для допустимых левых R-модулей.

Фиксируется атом $N \in \mathfrak{R}$. В $\mathfrak{L}$ существует атом M такой, что $M \cdot N \neq 0$. Кольцо $K = M \cap N$ не имеет делителей нуля, допускает вложение в кольцо частных и имеет тривиальные правую и левую структуры, состоящие из двух элементов $(0, K)$. Если $kx = 0$ или $yk = 0$, где $k \in K, x \in N, y \in M$, то или $k = 0$ или $x = 0$, $y = 0$. N является допустимым (K, R)-модулем, а M является допустимым (R, K)-модулем. Пусть $\mathfrak{N}$ — множество всех замкнутых подмодулей K-модуля N, а $\mathfrak{M}$ — множество всех замкнутых подмодулей K-модуля M. Доказывается, что отображение $L \to L \cap N$ $(I \to I \cap M)$ устанавливает изоморфизм между структурами $\mathfrak{L}(\mathfrak{R})$ и $\mathfrak{N}(\mathfrak{M})$.

Естественным образом определяется K-линейная независимость n элементов $x_1, \ldots, x_n$ из левого K-модуля N. Доказывается теорема:

Если $x_1, \ldots, x_n$ — любое множество K-линейно независимых элементов из N и $y_1, \ldots, y_n$ — любое K-множество элементов из N, то существует элемент $a \in R$ и элемент $k \in K$, $k \neq 0$, такие, что $x_i a = k y_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

На примере показывается, что для приведенных колец, обладающих правой и левой структурами, неверна теорема, аналогичная теореме об изоморфизме всех минимальных правых идеалов примитивного кольца R, рассматриваемых как R-модули.

Е. Г. Шульгейфер

1103. Характеристика кольца всех линейных преобразований в терминах теории идеалов. Вулфсон (An ideal-theoretic characterization of the ring of all linear transformations. Wolfson Kenneth G.), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 2, 358—386 (англ.)

В работе даются внутренние (в терминах самого кольца) характеристики кольца $T(F, A)$ всех линейных преобразований (л. п.) векторного пространства A над телом F и его подколец, содержащих кольца T_ν (F, A) всех л. п. ранга $< \aleph_\nu$ (рангом л. п. σ называется размерность подпространства $A\sigma$).

Предварительно изучаются свойства различных типов аннуляторов в кольце л. п. $E(F, A)$. Правым аннулятором $\mathfrak{R}(Q)$ подмножества (Q) кольца называется правый идеал, состоящий из всех элементов x, для которых $Qx = 0$; аналогично определяется левый аннулятор. В $E(F, A)$ вводятся также идеалы, связанные с аннулированием подпространств A. Для последних устанавливается ряд соответствий Галуа.

В $T_\nu(F, A)$ каждый главный правый (левый) идеал является аннулятором; обратно, каждый аннулятор ранга $< \aleph_\nu$ является главным идеалом (рангом идеала J кольца K называется наименьшая верхняя грань мощностей вполне упорядоченных цепей идеалов между нулем и J). $T_\nu(F, A)$ является регулярным кольцом. Кроме того, $T_\nu(F, A)$ порождается всеми идемпотентными л. п. ранга $< \aleph_\nu$ (размерность A должна быть не менее 2).

В терминах аннуляторов указан ряд условий, характеризующих полное кольцо K $n \times n$ матриц над телом F, например: K — примитивное кольцо с 1, в котором каждый левый идеал является аннулятором; K — примитивное кольцо с 1, каждый максимальный правый идеал которого является аннулятором; K — примитивное кольцо с 1 и минимальным односторонним идеалом, причем в K произведение любых двух правых (или левых) аннуляторов является правым (левым) аннулятором, и т. п.

Основными являются следующие результаты:

А. Кольцо K изоморфно кольцу всех конечных л. п. тогда и только тогда, когда выполнены условия: 1) K — простое кольцо с минимальным правым идеалом; 2) если для левого идеала H аннулятор $\mathfrak{R}(H) = 0$, то $H = K$.

Б. Кольцо K изоморфно кольцу всех л. п. тогда и только тогда, когда выполнены условия: 1) цоколь K_0 кольца K отличен от нуля и содержится во всех двусторонних идеалах кольца K; 2) если для левого идеала H аннулятор $\mathfrak{R}(H) = 0$, то $H \supseteq K_0$; 3) сумма любых двух правых (левых) аннуляторов есть правый (левый) аннулятор; 4) $K \ni 1$. Цоколем кольца называется сумма всех его минимальных односторонних идеалов.

Приводятся также условия, при которых K изоморфно некоторому кольцу л. п. $E(F, A)$, содержащему $T_\nu(F, A)$.

В заключение доказывается, что каждый изоморфизм φ между структурами левых, правых и двусторонних идеалов колец K и $T_0(F, A)$ (или между кольцом с единицей K и $T(F, A)$), удовлетворяющий условию $(LR)^\varphi = L^\varphi R^\varphi$ для любых левых идеалов L и правых R, индуцирует изоморфизм между K и $T_0(F, A)$ (или между K и $T(F, A)$). Здесь предполагается, что размерность пространства A не меньше 3. Этот результат является частичным обобщением на бесконечномерный случай известной теоремы о координатизации проективной геометрии. *В. М. Курочкин*

1104. О сопряжении и расслоении в нормальных алгебрах. **Перне** (Conjugaison et fibration dans les algèbres normales. Pernet Roger), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 13, 1325—1327 (франц.)

Пусть A — простая нормальная алгебра над полем k. A изоморфно подалгебре алгебры матриц над алгебраическим расширением k. Если элементу z из A соответствует матрица Z, то матрица, взаимная Z, тоже соответствует некоторому элементу $\bar{z}$ из A, так как она может быть представлена как многочлен от Z. Элемент $\bar{z}$ называется сопряженным к z. Это понятие распространяется на любые полупростые алгебры. Указываются некоторые свойства сопряженных элементов.

И. Р. Шафаревич

1105. О сопряжении и расслоении в нормальных алгебрах. **Перне** (Conjugaison et fibration dans les algèbres normales. Pernet Roger), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 14, 1403—1405 (франц.)

Для нильпотентной алгебры R сопряженный элемент определяется формулой $\bar{z} = z^{h-1}$, если h — наименьшее число такое, что $z^h = 0$ для всех $z \in R$. Произведения всевозможных пар элементов z и z' таких, что $zz' + \bar{z}\bar{z}' = 0$, порождают подалгебру R^* алгебры R. Доказывается, что $R^{*3} = 0$.

При помощи теоремы Веддерборна о разложении алгебры в полупрямую сумму радикала и факторалгебры по радикалу понятие сопряженного элемента, определенное для полупростых алгебр в предшествующей работе (см. реф. 1104), переносится на произвольные алгебры. *И. Р. Шафаревич*

1106. О семи-гомоморфизмах колец и их приложениях к проективной геометрии. **Хуа Ло-кен**, Усп. мат. наук, 1953, 8, № 3 (55), 143—148

Отображение $a \to a^\sigma$ ассоциативного кольца R на кольцо R' называется семи-гомоморфизмом, если $(a+b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma$, $(a^2)^\sigma = (a^\sigma)^2$, $(aba)^\sigma = a^\sigma b^\sigma a^\sigma$. Гомоморфизмы и антигомоморфизмы являются семи-гомоморфизмами.

Доказывается, что если R' не имеет делителей нуля, то, обратно, каждый семи-гомоморфизм R на R' есть или гомоморфизм или анти-гомоморфизм.

В качестве приложения рассматривается проективная прямая Π над произвольным телом K. Точками Π являются пары $(a, b) \neq (0, 0)$, $a, b \in K$, причем полагается $(a, b) = (ha, hb)$. Элементы тела K отождествляются с точками $(c, 1)$. Четверка точек $z_1, z_2, z_3, z_4 \in K$ называется гармонической, если $(z_2 - z_4)^{-1}(z_2 - z_3)(z_1 - z_3)^{-1}(z_1 - z_4) = -1$. Показывается, что всякое взаимно однозначное отображение проективной прямой Π над любым телом характеристики $\neq 2$ на себя, при котором гармонические четверки точек переходят в гармонические, имеет вид $z' = (az^\sigma + b)(cz^\sigma + d)^{-1}$, где σ — автоморфизм или анти-автоморфизм основного тела, а матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ обратима. Обратное также справедливо и проверяется прямыми вычислениями. Эта теорема ранее была известна лишь для отдельных частных случаев. *А. И. Мальцев*

1107. Специальные типы линейных отображений алгебр. **Голдхабер** (Special types of linear mappings of algebras. Goldhaber J. K.), Amer. J. Math., 1953, 75, № 1, 91—97 (англ.)

Рассматриваются линейные отображения ψ полупростой алгебры $\mathfrak{A}$ конечного ранга над полем характеристики $\chi \neq 2$. Если ψ является полуавтоморфизмом (т. е. $\psi(a^2) = [\psi(a)]^2$ или, что то же самое, $\psi(ab + ba) = \psi(a)\psi(b) + \psi(b)\psi(a)$, то, как показал Капланский (Kaplansky I., Duke Math. J., 1947, **14**, 521—525), в каждой простой компоненте алгебры $\mathfrak{A}$ отображение ψ будет порождать либо автоморфизм, либо обратный автоморфизм.

В реферируемой статье класс алгебр $\mathfrak{A}$ сужается так, чтобы теорема оставалась справедливой при более слабых предположениях о линейном отображении ψ:

1. Если $\mathfrak{A}$ — полная матричная алгебра, то достаточно предположить, что $\psi(a^2) = [\psi(a)]^2$ только для идемпотентов и для нильпотентных элементов индекса 2. Для простых алгебр это уже неверно.

2. Если $\mathfrak{A}$ — простая центральная алгебра над полем, содержащим достаточно большое число элементов, то достаточно предположить, что ψ переводит единицу в единицу и $f[\psi(a)] = 0$ для харак-

теристического многочлена $f(x)$ любого элемента a. Для полупростых алгебр это неверно.

3. Если дополнительно потребовать взаимную однозначность отображения ψ, то теорема будет верна и для полупростых сепарабельных алгебр.

В. М. Курочкин

1108. О вложении колец Биркгофа — Витта в поле частных. Тамари (On the embedding of Birkhoff — Witt rings in quotient fields. Tamari Dov), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 2, 197—202 (англ.)

Доказывается, что получаемое конструкцией Биркгофа — Витта ассоциативное кольцо, в котором точно представляется алгебра Ли L конечного ранга над полем F, допускает вложение в поле частных (отношений).

Фактически получается несколько более общее утверждение: вместо поля F используется (некоммутативное) кольцо R, вложимое в поле частных; требуется, чтобы константы a_{ijk} из равенств $[x_i x_j] = \Sigma a_{ijk} x_k$ лежали в центре R (x_1, x_2,... — «базис»), и предполагается, что L «локально-конечно», т. е. что любая конечная совокупность элементов базиса может быть расширена так, что она наряду с x_i и x_j будет содержать и те x_k, для которых $a_{ijk} \neq 0$, и при этом останется конечной.

В. М. Курочкин

1109. Псевдо-алгебры Ли. I. Херц (Pseudo-algèbres de Lie. I. Herz Jean-Claude), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 20, 1935—1937 (франц.)

Автор называет псевдо-алгеброй Ли левое векторное пространство E над телом K с операцией $\{\ ,\}$, удовлетворяющей аксиомам:

I. $\{u, v\} = -\{v, u\}$,

II. $\{u, v + w\} = \{u, v\} + \{u, w\}$,

III. $\{u, \{v, w\}\} + \{v, \{w, u\}\} + \{w, \{u, v\}\} = 0$,

IV. $\{u, \lambda v\} = \lambda \{u, v\} + \alpha v$, где $\alpha, \lambda \in K$ и α зависит лишь от u и λ.

Из аксиом выводятся некоторые простые соотношения; приводятся примеры псевдо-алгебр Ли, из которых характерен следующий:

Преобразование T векторного пространства V над полем K называется дифференциальным, если $T(x+y) = Tx + Ty$; $T(\alpha x) = \alpha (Tx) + \alpha_T x$, где $\alpha, \alpha_T \in K$, и α_T зависит лишь от α и T. Совокупность E дифференциальных преобразований становится векторным пространством над полем K, если положить $(T + T')x = Tx + T'x$, $(\lambda T)x = \lambda (Tx)$. Пространство E является псевдо-алгеброй Ли относительно операции $\{T, T'\} = T \circ T' - T' \circ T$.

А. И. Ширшов

1110. О коммутативных с ассоциативными степенями алгебрах степени два. Алберт (On commutative power-associative algebras of degree two. Albert A. A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **74**, № 2, 323—343 (англ.)

Если единица 1 простой коммутативной с ассоциативными степенями алгебры $\mathfrak{A}$ над полем $\mathfrak{F}$, характеристика которого взаимно проста с 30, может быть представлена в виде суммы $1 = u_1 + \ldots + u_t$ попарно ортогональных неразложимых идемпотентов u_i, то число t единственно и называется степенью $\mathfrak{A}$. При $t > 2$ алгебра $\mathfrak{A}$ является J-алгеброй, т. е. алгеброй Йордана (Trans. Amer. Math. Soc., 1950, **69**, 503—527).

Если для некоторого идемпотента u имеет место $\mathfrak{A}_u(\lambda)\mathfrak{A}_u(1/2) \subseteq \mathfrak{A}_u(1/2)$ ($\lambda = 0, 1$), то алгебра $\mathfrak{A}$ называется u-устойчивой ($\mathfrak{A}_u(\alpha)$ состоит из всех $x \in \mathfrak{A}$, для которых $ux = \alpha x$). Алгебра $\mathfrak{A}$ называется устойчивой, если она u-устойчива относительно каждого идемпотента $u \in \mathfrak{A}$. Центральная алгебра $\mathfrak{A}$ степени $t > 1$ устойчива тогда и только тогда, когда она является J-алгеброй.

Изучаются алгебры Ли дифференциальных преобразований u-устойчивых центральных алгебр $\mathfrak{A}$ степени два, построенных Кокорисом.

При помощи ассоциативных и коммутативных алгебр $\mathfrak{B}$ с единицей и их алгебр дифференциальных преобразований $\mathfrak{D}$ строятся коммутативные с ассоциативными степенями алгебры $\mathfrak{T}$. Алгебра $\mathfrak{B}$ называется $\mathfrak{D}$-простой, если в ней нет нетривиального идеала, допустимого относительно всех дифференциальных преобразований из $\mathfrak{D}$. Алгебра $\mathfrak{T}$ проста только тогда, когда $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{D}$-проста. Если алгебра $\mathfrak{B}$ над полем $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{D}$-проста, то характеристика $\mathfrak{F}$ равна p и $\mathfrak{B} = \mathfrak{F} + \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — радикал $\mathfrak{B}$, причем $x^p = 0$ для каждого $x \in \mathfrak{N}$. Строятся обобщения алгебр Кокориса, являющиеся центральными простыми коммутативными с ассоциативными степенями алгебрами; эти алгебры вкладываются в центральные u-устойчивые алгебры $\mathfrak{A}$.

А. Х. Лившиц

1111. Нормированные алгебры. Райт (Absolute valued algebras. Wright Fred B.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 4, 330—332 (англ.)

Рассматриваются неассоциативные нормированные алгебры A над полем действительных чисел R; предполагается, что норма удовлетворяет соотношению $|xy| = |x| \cdot |y|$ для любых x и y из A. Алгебра A называется алгебраической, если любая подалгебра $R[x]$, порожденная элементом x, конечномерна над R. Албертом (Albert A. A., Ann. Math., 1947, **48**, 495—501; Bull. Amer. Math. Soc., 1949, **55**, 763—768) было доказано, что нормированная алгебраическая алгебра с единицей конечномерна и является либо полем действительных чисел, либо полем комплексных чисел, либо телом кватернионов, либо алгеброй Кэли-Диксона.

Автор показывает, что любая нормированная алгебра с единицей, являющаяся телом, алгебраична и, следовательно, изоморфна одному из четырех перечисленных выше тел.

В. М. Курочкин

1112. Об отношениях конгруенции в дистрибутивных структурах с нулевым элементом. Арешкин Г. Я., Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 4, 485—486

В дистрибутивной структуре L с нулевым элементом (структуре L) для всякого μ-идеала I отношение конгруенции $\underline{K}(I)$, — определяемое по правилу: $x \equiv y \pmod{\underline{K}(I)}$, $x, y \in L$, тогда и только тогда, когда $x \vee t = y \vee t$ для некоторого элемента t из I, — является наименьшим среди всех отношений конгруенции, для которых идеал I является ядром, т. е. классом элементов $x \equiv 0 \pmod{\underline{K}(I)}$, а отношение конгруенции, определяемое по правилу

$x \equiv y \pmod{K(I)}$, $x, y \in L$, тогда и только тогда, когда из включения $a \wedge (x \wedge y) \in I$ следует включение $a \wedge (x \vee y) \in I$ для всякого элемента a структуры L,— является наибольшим.

Если θ_1 и θ_2 являются гомоморфными отображениями, соответственно, структуры A на структуру B и структуры B на структуру C, то под их произведением $\theta = \theta_1 \cdot \theta_2$ понимается гомоморфное отображение $\theta(x) = \theta_2[\theta_1(x)]$, $x \in A$, структуры A на структуру C. Если K, K_1 и K_2 являются отношениями конгруенции, соответствующими отображениям θ, θ_1 и θ_2, то K называется произведением конгруенций K_1 и K_2: $K = K_1 \cdot K_2$. A/K изоморфно $(A/K_1)/K_2$.

Пусть $[\underline{K}(I), \overline{K}(I)]$ и $[\underline{K}(\overline{0}), \overline{K}(\overline{0})]$ — сегменты отношений конгруенции, соответственно, на структуре L и на фактор-структуре $L/\underline{K}(I)$. Всякое отношение конгруенции K с ядром I, заданное на структуре L, однозначно определяет на фактор-структуре $L/\underline{K}(I)$ отношение конгруенции K^* так, что 1) $K^* \in [\underline{K}(\overline{0}), \overline{K}(\overline{0})]$; 2) $K = \underline{K}(I) \cdot K^*$; 3) отображение $K \to K^*$ является изоморфным отображением сегмента $[\underline{K}(I), \overline{K}(I)]$ на сегмент $[\underline{K}(\overline{0}), \overline{K}(\overline{0})]$.

Структуру A назовем слабо-дополнительной, если для любых x и y из A, $x \neq y$, найдется такой элемент $z \in A$, что $z \wedge (x \wedge y) = 0$, $z \wedge (x \vee y) \neq 0$. Структура L является обобщенной булевой структурой тогда и только тогда, когда для всякого μ-идеала I этой структуры фактор-структура $L/\underline{K}(I)$ слабо-дополнительна. Фактор-структура $L/K(I)$ слабо-дополнительна тогда и только тогда, когда $K(I) = \overline{K}(I)$.

Выполнение любого из нижеследующих трех условий необходимо и достаточно для того, чтобы на структуре L всякое отношение конгруенции однозначно определялось своим ядром.

1) Если для каких-нибудь двух элементов x и y структуры L и для какого-нибудь ее μ-идеала I $a \wedge (x \wedge y) \in I$ влечет $a \wedge (x \vee y) \in I$, $a \in L$, то существует такой элемент a_0 этой структуры, что $a_0 \wedge (x \wedge y) \in I$, $a_0 \vee (x \wedge y) \geqslant x \vee y$.

2) Для всякого μ-идеала I структуры L фактор-структура $L/K(I)$ слабо-дополнительна.

3) L является обобщенной булевой структурой.

Тем самым для структуры L решена проблема 73 Биркгофа (Биркгоф Г., Теория структур, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1952, 227). *А. Х. Лившиц*

1113. О числе типов симметрии булевых функций n переменных. Слепян (On the number of symmetry types of Boolean functions of n variables. Slepian David), Canad. J. Math., 1953, 5, № 2, 185—193 (англ.)

Излагается метод определения числа N_n типов булевых функций n переменных (т. е. функций f, аргументы которых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и сами функции принимают только два значения 0 и 1). По определению две булевы функции имеют одинаковый тип, если одна из этих функций получается из другой какой-либо перестановкой аргументов и заменой некоторых аргументов их дополнениями (до единицы). Во введении отмечается, что число физически существенно различных переключательных схем совпадает с числом различных типов булевых функций.

Операции перестановки и дополнения аргументов булевой функции образуют группу O_n порядка $2^n \cdot n!$ Используя теорию представлений групп, автор получает формулу для вычисления N_n и N_n^m — числа типов тех функций, которые разлагаются точно на m конституентов s_v единицы. Числа N_n^m равны коэффициентам при y^m в многочлене

$$\frac{1}{2^n \cdot n!} \sum n_C \prod_{i=1}^{k(C)} (1 + y^a), \qquad (1)$$

полученном ранее (в других обозначениях) в работе Полиа (Pólya G., J. Symbolic Logic, 1940, 5, 98—103), в которой были вычислены значения N_n и N_n^m для $n = 1, 2, 3, 4$;

$$N_n = \frac{1}{2^n \cdot n!} \sum 2^{k(C)} n_C .$$

Дается метод вычисления величин n_C (число элементов в классе C эквивалентных элементов группы O_n), $a = \lambda_i^{(C)}$ (длины циклов подстановки s_v, индуцируемой каким-либо элементом класса C), и $k(C)$ (число таких циклов), что не было сделано в указанной работе Полиа.

В конце статьи приводятся значения N_n для первых шести значений n: $N_1 = 3$; $N_2 = 6$; $N_3 = 22$; $N_4 = 402$; $N_5 = 1228158$; $N_6 = 400507806843728$.

В. И. Шестаков

1114. Конечные проективные плоскости и разностные системы. Берман (Finite projective plane geometries and difference sets. Berman Gerald), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 74, № 3, 492—499 (англ.)

Множество $\{d_j\}$ целых чисел d_j ($j = 0, 1, \ldots, m$) называется разностной системой (р. с.) по модулю $q = m^2 + m + 1$, если среди разностей $d_i - d_j \pmod q$ ($i, j = 0, 1, \ldots, m$; $i \neq j$) каждый из остатков $1, 2, \ldots, q-1$ встречается точно 1 раз.

Если считать точками классы вычетов по модулю q и определить прямые L_i как множество точек $d_j + i$ ($j = 0, 1, \ldots, m$; $i = 0, 1, \ldots, q-1$), то возникает проективная плоскость π. Если эта плоскость дезаргова (других плоскостей, получаемых таким способом, не найдено), то $m = p^n$ (p — простое число) и π является аналитической проективной плоскостью с однородными координатами из $F = GF(p^n)$.

Существует еще один способ представления π при помощи поля Галуа. В этом случае точки (прямые) плоскости определяются как множества элементов поля $K = GF(p^{3n})$, выражающихся линейно с коэффициентами из F через один (два) элемент из K. Для исследования второго способа в K выделяется подмножество E, состоящее из таких элементов α, что $\alpha^q \in F$, но $\alpha^i \notin F$ при $0 < i < q$.

Если $\alpha \in E$, то α^i ($i = 0, 1, \ldots, q-1$) пробегает множество всех точек π; тогда $\alpha^i = a_i + b_i\alpha + c_i\alpha^2$, $a_i, b_i, c_i \in F$. Из многочленов $f_i(\alpha) = a_i + b_i\alpha + c_i\alpha^2$ выберем те, которые имеют

степень меньше двух. Тогда множество соответствующих номеров образует р. с.

Таким образом, с каждым α из E связывается некоторая р. с. Автор выясняет, когда двум элементам из E соответствует одна и та же р. с. Наоборот, всякой р. с. отвечает $n(m-1)$ кубических многочленов над F. Корни этих многочленов, лежащие в K, являются элементами из E, с которыми описанная выше конструкция связывает данную р. с. В последней части работы исследуется, когда множество $\{td_j\}$ (t — целое число) является р. с., и связь этой р. с. с $\{d_j\}$. *Л. А. Скорняков*

1115. Некоммутативные структуры. Мацусита (Lattices non commutatifs. Matsushita Shin-ichi), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 16, 1525—1527 (франц.)

$\cup, \cap$-система B есть множество с двумя ассоциативными и идемпотентными бинарными операциями $\cup$ и $\cap$. $\cup, \cap$-система B называется общей (некоммутативной) структурой типа (l, l), (l, r), (r, l) или (r, r), если в B определена частичная упорядоченность $\leqslant$ так, что из $a \leqslant b$ следует $c \cup a \cup d \leqslant c \cup b \cup d$, $c \cap a \cap d \leqslant c \cap b \cap d$ и, соответственно, α) $a \leqslant a \cup b$, $a \cap b \leqslant a$, β) $a \leqslant a \cup b$, $b \cap a \leqslant a$, γ) $a \leqslant b \cup a$, $a \cap b \leqslant a$ или δ) $a \leqslant b \cup a$, $b \cap a \leqslant a$ для любых a, b из B.

Подсистема I системы B называется идеалом типа (l,l), (l,r), (r, l), или (r,r), если для любых $a \in I$ и $p \in B$ соответственно α) $a \cup p \in I$, $a \cap p \in I$, β) $a \cup p \in I$, $p \cap a \in I$, γ) $p \cup a \in I$, $a \cap p \in I$ или δ) $p \cup a \in I$, $p \cap a \in I$.

Каждая система B может быть разложена в прямую сумму минимальных идеалов. В общей структуре B типа (l, l), (l, r), (r, l) или (r, r), соответственно, выполняются соотношения: α) $a \cap (a \cup b) = a = a \cup (a \cap b)$, β) $a \cap (b \cup a) = a = (a \cap b) \cup a$, γ) $(a \cup b) \cap a = a = a \cup (b \cap a)$, δ) $(b \cup a) \cap a = a = (b \cap a) \cup a$.

Общая структура типа (l, l), (l, r), (r, l) или (r, r) называется нормальной, если она, соответственно, удовлетворяет одному из следующих законов модулярности: для $a \leqslant c$ и любого $b \in B$ α) $a \cup (b \cap c) \leqslant c \cap (b \cup a)$, β) $a \cup (c \cap b) \leqslant (b \cup a) \cap c$, γ) $(b \cap c) \cup a \leqslant c \cap (a \cup b)$, δ) $(c \cap b) \cup a \leqslant (a \cup b) \cap c$; в противном случае она называется особой.

Каждая общая структура B может быть разложена в прямую сумму $B = B_N \dotplus B_S$ двух общих структур, нормальной B_N и особой B_S. Общие структуры B_N и B_S являются прямыми суммами минимальных идеалов $B_N = \sum_\lambda I_N^\lambda$, $B_S = \sum_\mu I_S^\mu$, где все I_N^λ — обычные структуры, изоморфные друг другу. *Л. Х. Лившиц*

1116. О симметрических ассоциативных системах. Воробьев Н. Н., Уч. Зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1953, 89, 161—166

Отображение p множества M в себя автор называет почти тождественным, если лишь для конечного числа элементов α из M $p(\alpha) \neq \alpha$. Число элементов $\alpha \in M$, для которых $p\xi \neq \alpha$ при всех $\xi \in M$, называется дефектом отображения. Относительно умножения (т. е. последовательного применения) отображений совокупность C всех почти тождественных отображений множества M является полугруппой (ассоциативной системой). Доказывается, что система C не имеет других нормальных подсистем, кроме самой C, группы взаимно однозначных отображений M на себя и нормальных делителей последней.

Совокупность всех отображений с дефектом большим или равным k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) образует идеал C. Других идеалов C не имеет.

Выясняется также строение произвольного порождающего множества для C. *Е. С. Ляпин*

1117 РЕЦ. Теория норм. Шиллинг (The theory of valuations. Schilling O. F. G., pp. 253, N. Y., American Mathematical Society, 1950) [Рецензия: **Пизо** (Pisot Ch.), Bull. sci. math., 1953, 77, ч. 1, 3—4 (франц.)]

1118 РЕЦ. Теория структур. Ренни (The theorie of lattices. Rennie B. C., pp. 51, 1.50 doll) Cambridge, England, Foister and Jagg, 1951, [Рецензия: **Дилуэрт** (Dilworth R. P.), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 1, 100 (англ.)]

1119 Д. О матричных представлениях конечных ассоциативных систем. Понизовский И. С., Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Ленингр. гос. пед. ин-т., Л., 1953

См. также: 1007, 1011, 1014, 1017 **РЕЦ**, 1019 **РЕЦ**, 1125, 1130, 1132, 1253, 1255, 1259, 1270, 1357, 1363 **РЕЦ**, 1364, 1365—1369, 1370 **РЕЦ**, 1406, 1407, 1420 **РЕЦ**, 1428

ТОПОЛОГИЯ

1120. Существование периодических точек. Фулер (The existence of periodic points. Fuller F. B.), Ann. Math., 1953, 57, № 2, 229—230 (англ.)

Периодической точкой отображения f множества M в себя называется такая точка $x \in M$, которая является неподвижной точкой некоторой итерации f^k отображения f: $f^k(x) = x$. Доказывается следующая теорема:

Пусть f — отображение комплекса K в себя, индуцирующее автоморфизмы групп Δ-гомологий комплекса K по рациональному полю коэффициентов. Если эйлерова характеристика комплекса K отлична от нуля, то отображение f имеет периодические точки (в частности, гомеоморфное отображение комплекса с ненулевой эйлеровой характеристикой на себя всегда имеет периодическую точку).

Если m — сумма всех чисел Бетти четных размерностей комплекса K, а n — сумма всех его чисел Бетти нечетных размерностей, то можно, сверх того, утверждать, что отображение f имеет периодическую точку, период которой не превосходит числа $\max(m, n)$. *В. Г. Болтянский*

1121. О произведениях комплексов. Эйленберг, Зилбер (On products of complexes.

Eilenberg Samuel, Zilber J. A.), Amer. J. Math., 1953, 75, № 1, 200—204 (англ.)

Полным полусимплициальным комплексом (и. п. комплексом) называется множество элементов (симплексов), для каждого из которых определена размерность $q \geqslant 0$; предполагается еще, что для любого q-мерного симплекса σ и любого монотонного отображения α множества $\{0, 1,..., m\}$ в множество $\{0, 1,..., q\}$ определен m-мерный симплекс $\sigma\alpha$, причем $(\sigma\alpha)\beta = \sigma(\alpha\beta)$, а если отображение α тождественно, то $\sigma\alpha = \sigma$. Цепи, клеточные отображения и клеточные гомотопии п. п. комплексов определяются естественным образом.

Декартовым произведением $K \times L$ п. п. комплексов K и L называется п. п. комплекс, q-мерными симплексами которого являются пары (σ,τ), где $\sigma \in K$ и $\tau \in L$ — q-мерные симплексы, а операция α определяется формулой $(\sigma,\tau)\alpha = (\sigma\alpha, \tau\alpha)$. Тензорным произведением $K \otimes L$ п. п. комплексов K и L называется клеточный комплекс, r-мерными клетками которого являются пары $\sigma \otimes \tau$, где $\sigma \in K$ — p-мерный, а $\tau \in L$ — q-мерный симплексы $(p + q = r)$; граничный гомоморфизм в $K \otimes L$ определяется формулой

$$\partial(\sigma \otimes \tau) = \partial\sigma \otimes \tau + (-1)^p \sigma \otimes \partial\tau.$$

Используя работу Эйленберга и Мак-Лейна (см. реф. 1125), авторы показывают, что комплексы $K \times L$ и $K \otimes L$ клеточно эквивалентны. В качестве приложения этого результата показывается, что сингулярный комплекс $S(X \times Y)$ топологического произведения $X \times Y$ эквивалентен декартову произведению $S(X) \times S(Y)$ соответствующих сингулярных комплексов. Если, далее, U и V — покрытия пространств X и Y, а $U \times V$ — соответствующее покрытие произведения $X \times Y$, то нерв $N(U \times V)$ покрытия $U \times V$ эквивалентен тензорному произведению $N(U) \otimes N(V)$ нервов покрытий U и V. При доказательстве последнего утверждения вводится понятие симплициального произведения симплициальных комплексов. *М. М. Постников*

1122. Об общей теории ∇-гомологий. Радо (On general cohomology theory. Rado Tibor), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 2, 244—246 (англ.)

Пусть X — топологическое пространство, A — его подмножество. Упорядоченное множество $t^p = \{x_0,..., x_p\}$, состоящее из $p + 1$ точек пространства X, назовем p-мерным остовом этого пространства; если все точки $x_0,..., x_p$ принадлежат множеству $B \subset X$, то условимся писать $t^p \in B$.

Целочисленная функция, заданная на p-мерных остовах пространства X, называется p-мерной цепью в X. Через $C^p(X, A)$ обозначим множество всех тех p-мерных цепей c^p, которые удовлетворяют двум следующим условиям: 1) если $t^p \in A$, то $c^p(t^p) = 0$, 2) для каждой точки $x \in X$ существует такая ее окрестность $U = U(x, c^p)$ в пространстве X, что $c^p(t^p) = 0$ при $t^p \in U$. ∇-граница определяется обычным образом; легко видеть, что для цепи $c^p \in C^p(X, A)$ имеем $\nabla c^p \in C^{p+1}(X, A)$.

Группа гомологий $\nabla^p(X, A)$ определяется как факторгруппа Z/H, где Z и H являются соответственно ядром и образом гомоморфизма ∇ в группе $C^p(X, A)$.

Указывается, что если X и A являются компактами, то построенная группа $\nabla^p(X, A)$ изоморфна обычной ∇-группе. Если же X — произвольное топологическое пространство, а A — его замкнутое подмножество, то эта группа изоморфна группе ∇-гомологий в смысле Уоллеса. *В. Г. Болтянский*

1123. Внутренние гомологии. Рохлин В. А., Докл. АН СССР, 1953, 89, № 5, 789—792

Гладкие ориентированные k-мерные многообразия составляют аддитивную группу, если $-M^k$ понимать как многообразие M^k, взятое с противоположной ориентацией, а $M^k + N^k$ — как объединение непересекающихся экземпляров многообразий M^k и N^k. Автор называет многообразия M^k и N^k внутренне гомологичными между собой, если существует $(k + 1)$-мерное многообразие с краем, граница которого равна $M^k - N^k$. Это определение естественно приводит к понятию k-мерной группы внутренних гомологий. Обозначим ее через Ω^k.

Рассмотрение неориентированных k-мерных многообразий приводит к построению группы $\mathfrak{N}^k$ внутренних гомологий mod 2. Внутренние гомологии тесно связаны с характеристическими циклами — понтрягинскими для ориентированных многообразий и черновскими для неориентированных. Индексы отличных от эйлеровой характеристики нульмерных характеристических классов ориентированного (соответственно, неориентированного) многообразия автор называет характеристическими числами (соответственно, вычетами). Для многообразия, внутренне гомологичного нулю, все характеристические числа (или вычеты) равны нулю.

В заметке вычислены группы Ω^k и $\mathfrak{N}^k$ для $k \leqslant 4$. Кроме того, рассмотрен переход от ориентированных многообразий к неориентированным, что дает связь между группами Ω^k и $\mathfrak{N}^k$, а также показано, что в случае k, кратного четырем, группа Ω^k содержит бесконечную циклическую подгруппу. *В. Г. Болтянский*

1124. Гомологии, осуществляемые гладкими многообразиями. Том (Variétés différentiables cobordantes. Thom René), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 18, 1733—1735 (франц.)

В заметке рассмотрены группы гомологий, названные Рохлиным (см. реф. 1123) группами внутренних гомологий. Для исследования этих групп применены методы, развитые автором в предыдущих заметках (см. РЖМат, 1953, реф. 131, 132, 134). Отмечается, что группы Ω^k и $\mathfrak{N}^k$ изоморфны гомотопическим группам размерности $2k + 2$ некоторых вспомогательных пространств, построенных в предыдущих заметках.

Оказывается, что условие Понтрягина (обращение в нуль характеристических вычетов) является не только необходимым, но и достаточным условием для того, чтобы неориентированное многообразие было внутренне гомологично нулю. В случае ориентированного многообразия M^k обращение в нуль характеристических чисел Пон-

трягина обеспечивает лишь существование такого натурального числа n, что многообразие $n \cdot M^k$ внутренне гомологично нулю.

Группы Ω^k вычислены в заметке для $k \leqslant 7$. При $k \not\equiv 0 \pmod 4$ группа Ω^k оказывается конечной. Если в прямой сумме всех групп Ω^k (или $\mathfrak{N}^k$) рассматривать топологическое произведение как вторую операцию, то получается градуированное кольцо. Указываются алгебраические соотношения для этих колец. *В. Г. Болтянский*

1125. Ациклические модели. Эйленберг, Мак-Лейн (Acyclic models. Eilenberg Samuel, MacLane Saunders), Amer. J. Math., 1953, 75, № 1, 189—199 (англ.)

Излагается общая теорема о распространении отображений, связанная с ацикличностью рассматриваемых комплексов и применимая во многих вопросах алгебры и топологии. Напомним основные понятия используемой авторами теории категорий и функторов (Trans. Amer. Math. Soc., 1945, 58, 231—294). Категорией $\mathcal{A} = (A, \alpha)$ называется множество, состоящее из элементов двух сортов: объектов A и отображений α. Для некоторых отображений α_1 и α_2 определено их произведение, также являющееся отображением, и каждому объекту A отнесено отображение $e_A = e(A)$.

Выполняются следующие аксиомы: 1) Произведения $\alpha_3(\alpha_2\alpha_1)$ и $(\alpha_3\alpha_2)\alpha_1$ определены одновременно и совпадают. 2) Если $\alpha_3\alpha_2$ и $\alpha_2\alpha_1$ определены, то определено и $\alpha_3\alpha_2\alpha_1 (= \alpha_3(\alpha_2\alpha_1))$. 3) Для любого отображения α существуют такие объекты A_1 (область определения) и A_2 (область значений), что определены $\alpha e(A_1)$ и $e(A_2)\alpha$ (обозначение $\alpha : A_1 \to A_2$). 4) Все отображения $e(A)$ тождественны, т. е. если определено $\beta e(A)$ (или $e(A)\beta$), то оно совпадает с β. 5) Для любого тождественного отображения e существует единственный объект A, для которого $e(A) = e$. Примерами категорий могут служить множество $\mathfrak{S}$ всех абелевых групп и их гомоморфизмов и множество $\partial\mathfrak{S}$ всех абстрактных клеточных комплексов и их клеточных отображений.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — две категории. Объектной функцией $T(A)$ называется функция, относящая любому объекту $A \in \mathcal{A}$ объект $T(A) \in \mathcal{B}$. Аналогично определяется функция отображений $T(\alpha)$. Говорят, что объектная функция $T(A)$ и функция отображений $T(\alpha)$ образуют функтор T в $\mathcal{A}$ со значениями в $\mathcal{B}$, если: 1) $T(e_A) = e_{T(A)}$, 2) из $\alpha : A_1 \to A_2$ следует $T(\alpha) : T(A_1) \to T(A_2)$ (ковариантный функтор) или $T(\alpha) : T(A_2) \to T(A_1)$ (контравариантный функтор), 3) $T(\alpha_2\alpha_1)$ равно $T(\alpha_2) \cdot T(\alpha_1)$ (ковариантный функтор) или $T(\alpha_2\alpha_1) = T(\alpha_1) \cdot T(\alpha_2)$ (контравариантный функтор). Примером контравариантного функтора в $\partial\mathfrak{S}$ со значениями в $\mathfrak{S}$ является функтор $\nabla = (\nabla(A), f^*)$, где $\nabla(A)$ — группа ∇-гомологий комплекса A, а f^* — сопряженный гомоморфизм. Аналогично определяются многоместные функторы.

Пусть T и S — два ковариантных функтора в $\mathcal{A}$ со значениями в $\mathcal{B}$. Функция τ, относящая объектам $A \in \mathcal{A}$ отображения $\tau(A) \in \mathcal{B}$, называется натуральным преобразованием функтора T в функтор S (обозначение $\tau : T \to S$), если: 1) $\tau(A) : T(A) \to S(A)$, 2) для любого $\alpha : A_1 \to A_2$ имеем $\tau(A_2)\,T(\alpha) = S(\alpha)\,\tau(A_1)$. Аналогично определяются натуральные преобразования контравариантных и многоместных функторов.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое множество объектов категории $\mathcal{A}$, называемых моделями, а T — ковариантный функтор в $\mathcal{A}$ со значениями в $\mathfrak{S}$. Для любого объекта $A \in \mathcal{A}$ определим группу $\tilde{T}(A)$ как свободную абелеву группу, порожденную символами (φ, m), где $\varphi : M \to A$, $M \in \mathfrak{M}$, а $m \in T(M)$. Для любого отображения $\alpha : A \to B$ из $\mathcal{A}$ определим гомоморфизм $\tilde{T}(\alpha) : \tilde{T}(A) \to \tilde{T}(B)$, положив $\tilde{T}(\alpha)(\varphi, m) = (\alpha\varphi, m)$. Пара $\tilde{T}(A)$ и $\tilde{T}(\alpha)$ образует, очевидно, ковариантный функтор $\tilde{T}$ в $\mathcal{A}$ со значениями в $\mathfrak{S}$. Полагая $\Phi(A)(\varphi, m) = T(\varphi)\,m$, мы получим натуральное преобразование $\Phi : \tilde{T} \to T$. Функтор T называется представимым, если существует такое натуральное преобразование $\Psi : T \to \tilde{T}$, что $\Phi\Psi : T \to T$ тождественно, т. е. $\Phi\Psi = e_T$, где $e_T(A) = e_{T(A)}$.

Пусть K — ковариантный функтор в $\mathcal{A}$ со значениями в $\partial\mathfrak{S}$. Любому объекту $A \in \mathcal{A}$ он сопоставляет комплекс $K(A)$, состоящий из групп цепей $K_q(A)$ и граничных гомоморфизмов $\partial_q : K_q(A) \to K_{q-1}(A)$, причем $\partial_{q-1}\partial_q = 0$. Для любого q операция $A \to K_q(A)$ определяет функтор K_q в $\mathcal{A}$ со значениями в $\mathfrak{S}$, а гомоморфизм ∂_q — натуральные преобразования $\partial_q : K_q \to K_{q-1}$. Пусть L — также ковариантный функтор в $\mathcal{A}$ со значениями в $\partial\mathfrak{S}$. Семейство f натуральных преобразований $f_q : K_q \to L_q$ называется отображением $f : K \to L$, если $\partial_q f_q = f_{q-1}\partial_q$. Если f_q определены только для $q \leqslant n$, то f называется отображением $K \to L$ в размерности не большей n. Пусть $f, g : K \to L$ — два отображения. Гомотопией $D : f \simeq g$ называется последовательность таких натуральных преобразований $D_q : K_q \to L_{q+1}$, что $\partial_{q+1}D_q + D_{q-1}\partial_q = g_q - f_q$.

Основная теорема гласит:

Пусть K и L — ковариантные функторы в $\mathcal{A}$ со значениями в $\partial\mathfrak{S}$ и пусть $f : K \to L$ — отображение в размерностях меньших q. Если K_n представимы для всех $n \geqslant q$ и если $H_n(L(M)) = 0$ для всех $n \geqslant q-1$ и всех $M \in \mathfrak{M}$, то f обладает продолжением $f' : K \to L$. Любые два таких продолжения гомотопны, причем связывающая их гомотопия D такова, что $D_n = 0$, если $n < q$.

В качестве приложения полученных теорем доказывается, в частности, эквивалентность обычной симплициальной теории сингулярных гомологий теории кубических гомологий Серра.

М. М. Постников

1126. Философско-научное значение современных исследований об абстрактных пространствах. Жемона (Significato filosofico-scientifico delle ricerche moderne sugli spazi astratti. Geymonat Ludovico), Archimede, 1953, 5, № 1, 1—8 (итал.)

Приводятся весьма общие рассуждения о различных типах топологических пространств, размерности, непрерывности и т. п., не содержащие каких-либо математических фактов или философских обобщений. *П. С. Александров*

1127. Общая теория сходимости. Мак-Шейн (A general theory of convergence. McShane E. J.), Science, 1953, 117, № 3044, 469 (англ.)

Обобщение понятия фильтра, дающее еще более общее определение сходимости, охватывающее сходимость по направленному множеству.

П. С. Александров

1128. О числе деревьев Хусими. Х а р а р и, У л е н б е к (On the number of Husimi trees. I. H a r a r y F r a n k, U h l e n b e c k G e o r g e E.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, 39, № 4, 315—322 (англ.)

Теория так называемого вириального разложения уравнения состояния неидеального газа приводит к комбинаторной проблеме для некоторых типов линейных граф. Простейшими из граф этих типов являются «деревья Хусими» — связные графы, в которых ни одно ребро не входит более чем в один цикл.

Проблема состоит в отыскании числа топологически различных граф с заданными количествами вершин, ребер, треугольников, тетраэдров и т. д. для двух случаев: а) если все вершины считаются различными, б) если вершины сами по себе считаются неразличимыми.

В случае а) подсчет числа топологически различных деревьев Хусими уже сделан (Husimi K., J. Chem. Phys., 1950, 18, 682—684). В случае б) подсчет затрудняется ввиду необходимости учитывать внутреннюю симметрию граф. Авторы излагают идею общего метода подсчета для деревьев Хусими в случае б) и демонстрируют этот метод на ряде частных случаев.

А. А. Зыков

1129 РЕЦ. Основы комбинаторной топологии П о н т р я г и н (Foundations of combinatorial topology. P o n t r y a g i n L. S., Transl. by Bagemihl F., Komm H., Seidel W., pp. 99, Graylock Press, Rochester, 1952, 3.00 doll.) [**Рецензии: Шметтерер** (Schmetterer L.), Internat. math. Nachr., 1953, 7, № 25/26, 52—53 (нем.); **М а с с и** (Massey W. S.), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 2, 188—189 (англ.)]

1130 РЕЦ. Основы алгебраической топологии. Э й л е н б е р г, С т и н р о д (Foundations of algebraic topology. E i l e n b e r g S., S t e e n r o d N., pp. 328, Princeton University Press, 1952) [**Рецензия: П р а х а р** (Prachar K.), Internat. math. Nachr. 1953, 7, № 25/26, 50—51 (нем.)]

1131 Д. Вычисление циклов Черна алгебраических многообразий. Г а м к р е л и д з е Р. В. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Н.-и. ин-т мех. и мат. МГУ, М., 1953

1132 Д. Структурный метод в теории топологических пространств. А р е ш к и н Г. Я. Автореф. дисс. докт. физ.-мат. н., Матем. ин-т им. Стеклова АН СССР, М., 1953

———

См. также: 1008, 1011, 1017 **РЕЦ,** 1028, 1086, 1088, 1094, 1127, 1170, 1251, 1259, 1389, 1391, 1392

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1133. Эргодические множества. О к с т о б и Д., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 3 (55), 75—97

Статья представляет собой перевод статьи Окстоби (Oxtoby J. G., Bull. Amer. Math. Soc., 1952, 58, № 2, 116—136).

Дается обзор исследований эргодических множеств. Автор ограничивается системами с дискретным временем. Кратко излагаются теоремы Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова (Ann. Math., 1937, 38, 65—113), указываются характеристические свойства транзитивных точек, выясняются условия, при которых эргодическая теорема имеет место в смысле равномерной сходимости.

Далее показывается, что изучение борелевских систем с конечной инвариантной мерой может быть сведено к изучению компактных систем. В конце работы приводится пример минимального множества, не являющегося строго эргодическим. Первый пример такого рода был построен А. А. Марковым.

Е. А. Барбашин

1134. О полуупорядоченной мере множеств, измеримых функциях и некоторых абстрактных интегралах. С о б о л е в В. И., Докл. АН СССР, 1953, 91, № 1, 23—26

Строится мера линейных точечных множеств, значения которой принадлежат полуупорядоченному кольцу (Соболев В. И., Докл. АН СССР, 1947, 56, № 3, 237), рассматриваются измеримые в смысле этой меры функции и вводится интеграл типа Лебега-Стилтьеса.

Если X — полуупорядоченное кольцо и $\{e_\lambda\}$. $-\infty < \lambda < +\infty$, — разложение единицы e этого кольца, то порождаемая этим разложением аддитивная функция $e(\triangle)$ интервала $\triangle$ нормальна, вполне аддитивна и обычным образом продолжаема в меру. После этого обычным путем определяется интеграл типа Лебега — Стилтьеса

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, de_\lambda.$$

Полуупорядоченная мера и интеграл используются при изучении полуупорядоченных колец. Если $a \in X$, $\{e_\lambda^a\}$ — разложение единицы, порожденное элементом a, $f(\lambda)$ суммируема относительно меры $e^a(M)$ (a-суммируема), то элемент

$$b = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, de_\lambda^a$$

называется функцией от a и обозначается $f(a)$. Доказывается теорема:

Для того, чтобы b был функцией от a, необходимо и достаточно, чтобы для любого интервала $\triangle$ нашлось a-измеримое множество $M_\triangle$ такое, что $e^b(\triangle) = e^a(M_\triangle)$. Отмечается, что теорию можно распространить на случай линейного полуупорядоченного пространства X.

П. П. Романовский

1135. Об одном обобщении теоремы Бэра. Ариньш Е. Г., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 3 (55), 105—108

Известно, что предельный переход в последовательности непрерывных функций не нарушает непрерывности на множестве второй категории (прямая теорема Бэра). Для свойства полунепрерывности это, вообще говоря, несправедливо. Существуют монотонно возрастающие последовательности функций полунепрерывных сверху, пределы которых не имеют ни одной точки полунепрерывности сверху. Автор доказывает, что тем не менее справедливо следующее обобщение прямой теоремы Бэра:

Множество точек полунепрерывности снизу предела монотонно возрастающей последовательности функций полунепрерывных сверху является множеством второй категории на всяком совершенном множестве.

Указанная теорема, вообще говоря, не допускает обращения, однако обращение становится возможным при дополнительном условии, что функция принадлежит классификации Бэра. Доказана также следующая теорема:

Если принадлежащая классификации Бэра функция имеет на любом совершенном множестве множество второй категории точек полунепрерывности сверху, то она является пределом монотонно убывающей последовательности функций, полунепрерывных снизу. *И. Е. Жак*

1136. О компактности систем обобщенных почти периодических функций Вейля. Кованько А. С., Украинский мат. ж., 1953, 5, № 2, 185—195

Пусть $E \subset (-\infty, \infty)$, $\omega \geqslant 1$, $T > 0$, $f(x)$, $\varphi(x)$ — функции, определенные на $(-\infty, \infty)$ и суммируемые с ω-й степенью на каждом конечном интервале. Вводятся обозначения

$$D^{TE}_{S_\omega}(f, \varphi) =$$

$$= \sup_{-\infty < a < \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int\limits_{E \cap (a, a+T)} |f(x) - \varphi(x)|^\omega dx \right\}^{1/\omega},$$

$$D^{E}_{w'_\omega}(f, \varphi) = \lim_{T \to \infty} D^{TE}_{S_\omega}(f, \varphi),$$

$$\delta^T_S E = \sup_{-\infty < a < \infty} \frac{1}{T} \{ \operatorname{mes} (E \cap (a, a+T)) \};$$

при $E = (-\infty, \infty)$ $D^{TE}_{S_\omega}$, $D^{E}_{w_\omega}$ обозначаются через $D^{T}_{S_\omega}$, $D_{w'_\omega}$.

Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ называется D_{w_ω}-равномерно сходящейся к функции $f(x)$, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $T_0 > 0$, что $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} D^{T}_{S_\omega}(f, f_n) \leqslant \varepsilon$ при $T \geqslant T_0$.

Доказываются следующие теоремы:

Теорема В. Для компактности системы $\mathfrak{M}(f)$ w_ω-почти периодических функций в смысле D_{w_ω}-равномерной сходимости достаточно выполнения следующих трех условий:

1) Каждому $\varepsilon_1 > 0$ соответствуют $\sigma > 0$ и $T_1 > 0$ такие, что для любой функции $f(x) \in \mathfrak{M}(f)$ выполняется неравенство $D^{TE}_{S_\omega}(f, 0) < \varepsilon_1$, если $\delta^T_S E < \sigma$ и $T \geqslant T_1$;

2) Каждому $\varepsilon_2 > 0$ соответствуют $\eta > 0$ и $T_2 > 0$ такие, что для любой функции $f(x) \in \mathfrak{M}(f)$ $D^{T}_{S_\omega}(f(x+h), f(x)) < \varepsilon_2$, если $|h| < \eta$ и $T \geqslant T_2$;

3) Каждому $\varepsilon_3 > 0$ соответствуют $T_3 > 0$ и относительно плотное множество почти периодов $\{\tau\}$ таких, что для любой функции $f(x) \in \mathfrak{M}(f)$ $D^{T}_{S_\omega}(f(x+\tau), f(x)) < \varepsilon_3$ при $T \geqslant T_3$.

Теорема С. Необходимое и достаточное условие того, чтобы функция $f(x)$ была w_ω-почти периодической, состоит в том, чтобы система всех ее смещений $\{f(x+k)\}$ была компактной в смысле D_{w_ω}-равномерной сходимости. *Б. И. Коренблюм*

1137. Замечание по поводу критерия замкнутости Грэвса. Рудин (A remark concerning Graves, closure criterion. Rudin Walter), Canad. J. Math., 1953, 5, № 2, 194—195 (англ.)

Доказывается теорема:

Пусть $p(t)$ — функция такая, что ее нули образуют множество меры нуль и что для каждого $x \in (a, b)$ $p \in L_2$ на отрезке $\min(c, x) < t < \max(c, x)$, где $a \leqslant c \leqslant b$ (a, b и c могут быть бесконечными). Пусть w — измеримая почти всюду положительная функция такая, что

$$w(x) \int\limits_c^x |p(t)|^2 dt \in L_1 \quad \text{на } (a, b).$$

Тогда для любого семейства функций $\{\varphi_n\}$, ортонормального на (a, b), справедливо следующее неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b \left| \int\limits_c^x p(t) \varphi_n(t) dt \right|^2 w(x) dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b \left| \int\limits_c^x |p(t)|^2 dt \right| w(x) dx.$$

При этом равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\{\varphi_n\}$ — замкнутая последовательность в L_2 на (a, b). Этот результат является обобщением аналогичной теоремы Грэвса (Graves R. E., Canad. J. Math., 1952, **4**, 198—203), который предполагал, что множество нулей и точек разрыва $p(t)$ имеет жорданову меру нуль. *С. М. Никольский*

1138 РЕЦ. Теория множеств. Куратовский, Мостовский (Teoria mnogości. Kuratowski K., Mostowski A., S.311, Monogr. matem., Bd. 27, Warszawa, 1952) [**Рецензия:** Прахар (Prachar K.), Internat. math. Nachr., 1953, 7, № 25/26, 49 (нем.)]

1139 РЕЦ. Интегрирование (Гл. I—IV). Бурбаки (Intégration (Chap. I—IV). Bourbaki N., pp. 2+237+5, Hermann, Paris, 1952, 2300 fr.) [**Рецензия:** Халмош (Halmos Paul R.), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 3, 249—255 (англ.)]

1140 Д. О второй конечной разности и второй обобщенной производной. Кабаков Ф. А. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Моск. гос. пед. ин-т, М., 1953.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

1141. Слабо весовые функции и майоранты. Бернштейн С. Н., Докл. АН СССР, 1953, 90, № 5, 703—706

Функцию $\Phi(x) > 0$ $(-\infty < x < \infty)$ автор называет слабо весовой, если для любой непрерывной функции $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, удовлетворяющей условию $\lim_{x\to\infty} f(x)/\Phi(x) = 0$, при любом $\varepsilon > 0$ можно найти такую целую функцию $H(x)$ любой данной степени $p > 0$, что на всей числовой оси $|f(x) - H(x)| < \varepsilon\Phi(x)$.

В статье установлена следующая теорема:

Теорема B*. Для того чтобы четная и при $x > 0$ монотонно возрастающая функция $\Phi(x) > 0$ была слабо весовой, необходимо и достаточно, чтобы для всех функций $G_p(x)$ какой-нибудь степени $p > 0$ с четным модулем $|G_p(x)| \leqslant \Phi(x)$ была бесконечна верхняя грань значений

$$\int_0^\infty \frac{\log|G_p(x)/G_p(0)|}{x^2}\,dx.$$

Затем даны некоторые применения этой теоремы. Важнейшее из них гласит:

Теорема 1. Всякая четная и при $x > 0$ монотонно возрастающая функция $\Phi(x) > 0$ является либо слабо весовой, либо майорантой квази-конечного роста.

При этом по определению, данному автором в одной из прежних работ, функция $\Phi(x) \geqslant 0$ $(-\infty < x < \infty)$ называется майорантой квази-конечного роста, если для любого $p > 0$ существует последовательность функций

$\Phi_{k,p}(x) \geqslant 0$ $(-\infty < x < \infty)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$,

удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\Phi_{k,p}(x)} \leqslant p^* = \varphi(p),$$

и такая, что неравенство $|H(x)| \leqslant \Phi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ для целой функции $H(x)$ степени p влечет следующие неравенства для ее последовательных производных:

$$|H^{(k)}(x)| \leqslant \Phi_{k,p}(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Н. И. Ахиезер

1142. Обобщение неравенств С. Н. Бернштейна и А. А. Маркова. Бари Н. К., Докл. АН СССР, 90, № 5, 701—702

Пусть $T_n(x)$ — тригонометрический полином порядка не выше n, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $-\infty < a < a' < b' < b < \infty$. Формулируются следующие теоремы:

1) $$\|T_n'\|_{L^p(a',b')} \leqslant Cn\,\|T_n\|_{L^p(a,b)},$$

где постоянная C зависит только от a' и b'. [Повидимому подразумевается, что a и b фиксированы. В противном случае C должно зависеть и от них.— *Прим. реф.*]

2) $$\|T_n'\|_{L^p(a,b)} \leqslant Cn^2\,\|T_n\|_{L^p(a,b)},$$

где C зависит только от a и b.

3) $$\|T_n(x)\|_{L^p(-\pi,\pi)} \leqslant Cn\,\|T_n(x)\sin x\|_{L^p(-\pi,\pi)},$$

где C — абсолютная постоянная.

4) При $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ имеем

$$\|T_n\|_{L^q(a,b)} \leqslant Cn^{2/p-2/q}\,\|T_n\|_{L^p(a,b)},$$

где C зависит только от a и b.

Указывается, что: а) при $p = \infty$ теорема 1) доказана И. И. Приваловым (C. r. Acad. sci., 1916, 162); б) теорема 1) позволяет «локализовать» ряд теорем конструктивной теории функций, в частности, теоремы С. Н. Бернштейна, обратные теоремам Джексона; в) теорема 4) является соответствующим аналогом теоремы С. М. Никольского (Тр. мат. ин-та им. Стеклова, 1951, 38, 244—278), который рассмотрел случай $b - a = 2\pi$; г) теорема 2) верна и для случая, когда T_n есть алгебраический полином порядка не выше n, что при $p = 2$ доказал Шмидт (Schmidt E., Math. Ann., 1944, 119, 165). [Справедливость 2) для случая, когда T_n есть алгебраический полином и p — любое число, $p \geqslant 1$, известна (Szegö — Hille — Tamarkin, Duke Math. J., 1937, 3, 729—739).— *Прим. реф.*].

С. М. Лозинский

1143. Об одной задаче, аналогичной задачам Е. И. Золотарева — Н. И. Ахиезера. Рыма-ренко Б. А., Тр. Ин-та математики и механики АН Узб. ССР, 1953, 10, № 2, 129—133

Из всех многочленов степени n

$$y_n(x) = x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \ldots, \qquad n = 2m + 1,$$

монотонно возрастающих на всей вещественной оси и имеющих заданные коэффициенты σ_1, σ_2, находится тот, для которого полная вариация на отрезке $[-1, +1]$ минимальна; найдено точное значение этой минимальной вариации, а также ее асимптотическая величина при $n \to \infty$ в двух случаях: 1) σ_1, σ_2 не зависят от n; 2) $\sigma_1 = k_1\sqrt{m}$, $\sigma_2 = k_2 m$, где k_1, k_2 не зависят от n. *Я. Л. Геронимус*

1144. Некоторые теоремы относительно полиномов от нескольких переменных, наименее уклоняющихся от данной функции, коэффициенты которых связаны несколькими линейными зависимостями. Гребенюк Д. Г., Тр. Ин-та математики и механики АН Узб.ССР, 1953, 10, № 2, 105—128

Рассматривается множество полиномов вида

$$p_n(x, y) = \sum_{0 \leqslant i+k \leqslant n} p_{ik} x^i y^k,$$

коэффициенты которых связаны двумя заданными линейными соотношениями, и изучаются свойства тех полиномов, которые среди других полиномов этого множества наименее уклоняются в области D на плоскости от некоторой непрерывной функции $f(x, y)$.

Доказывается ряд теорем, содержащих те или иные характеристики таких полиномов наилучшего приближения. Эти теоремы не приводятся здесь из-за громоздкости формулировок. *А. Ф. Тиман*

1145. О наилучших приближениях многочленами функции, s-я производная которой имеет разрыв

первого рода. Ибрагимов И. И., Изв. АН Азерб. ССР, 1953, **3**, № 3, 19—48

С. Н. Бернштейн (Докл. АН СССР, 1953, **18**, № 7, 379—384) получил асимптотическое выражение для наилучшего приближения функций, имеющих конечное число особенностей вида $|x-a|^s$. В работе референта (Докл. АН СССР, 1947, **55**, № 2, 99—102) это асимптотическое выражение получено для функции, имеющей производную произвольного порядка с разрывами первого рода. Автор решает эту задачу в случае функций, имеющих особенности вида

$$V_{s-1}(x-c;\ a,\ b)=[a(x-c)+b\,|\,x-c\,|\,]\,|x-c\,|^{s-1}$$
$$|c|\leqslant 1,\quad s>0,\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Если $a=b=1$, то эта функция имеет производную порядка s, вообще говоря, дробную в смысле Лиувилля, с разрывом первого рода.

Отметим следующий результат:

Пусть s — любое положительное, вообще говоря, дробное число и функция $f(x)$ является s-кратным неопределенным интегралом от функции $\varphi(x)=f^{(s)}(x)$, обладающей следующим свойством: $\varphi(x)$ конечна на $[-1, +1]$ и имеет разрывы только первого рода; внутри интервала $-1<x<1$ имеется по меньшей мере один разрыв. Тогда имеет место асимптотическое равенство

$$E_n(f)\asymp\frac{\varkappa\lambda}{2\Gamma(s+1)\,n^s}\qquad(n\to\infty),$$

$$\varkappa=\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|\varphi(x+0)-\varphi(x-0)|\,(1-x^2)^{s/2},$$

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}n^sE_n[V_{s-1}(x;1,1)].$$

При целом нечетном s это равенство получено в упомянутой работе референта.

Параграфы 3 и 5 работы содержат развернутые доказательства результатов, сформулированных автором в другой заметке (см. РЖМат, 1953, реф. 663). *С. М. Никольский*

1146. К теории наилучшего приближения функций многих переменных с помощью целых функций конечной степени. Иноземцев О. И., Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 1, 15—18

Рассматривается пространство C_φ непрерывных функций $f(x_1,\ldots,x_n)$ от многих переменных с нормой

$$\|f\|=\sup_{-\infty<x_1,\ldots,x_n<\infty}\frac{|f(x_1,\ldots,x_n)|}{\varphi(x_1,\ldots,x_n)},$$

где $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ — заданная так называемая весовая функция, удовлетворяющая некоторым естественным условиям, связанным, в основном, с поведением функции

$$\varkappa(t)=\sup_{\substack{-\infty<x_1,\ldots,x_n<\infty\\ \xi_1^2+\ldots+\xi_n^2\leqslant t^2}}\frac{\varphi(x_1+\xi_1,\ldots,x_n+\xi_n)}{\varphi(x_1,\ldots,x_n)}.$$

Формулируются две теоремы, устанавливающие влияние некоторых структурных свойств функций $f\in C_\varphi$ на их конструктивные свойства и наоборот.

Пусть

$$\omega_\varphi(\rho;f)=\sup_{\substack{-\infty<x_1,\ldots,x_n<\infty\\ \xi_1^2+\ldots+\xi_n^2\leqslant\rho^2}}\frac{|f(x_1+\xi_1,\ldots,x_n+\xi_n)-f(x_1,\ldots,x_n)|}{\varphi(x_1,\ldots,x_n)\,\alpha(\rho)},$$

$$\Omega_\varphi(\delta;f)=\sup_{\substack{-\infty<x_1,\ldots,x_n<\infty\\ \rho\leqslant\delta}}\frac{\left|\frac{1}{S}\int_S f(x_1+\rho\xi_1,\ldots,x_n+\rho\xi_n)\,dS_\xi-f(x_1,\ldots,x_n)\right|}{\varphi(x_1,\ldots,x_n)\,\alpha(\rho)}$$

(где S — поверхность сферы $\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2=1$, dS_ξ — ее $(n-1)$-мерный элемент площади). Если под $E_\sigma(f;\varphi)$ понимать наилучшее приближение функции f по норме пространства C_φ функциями (целыми, конечной сферической степени) $g(z_1,\ldots,z_n)$, для которых

$$\overline{\lim}\frac{\ln|g(z_1,\ldots,z_n)|}{\sqrt{|z_1|^2+\ldots+|z_n|^2}}\leqslant\sigma<\infty,\qquad(1)$$

то справедливы утверждения:

1) Если $f\in C_\varphi$ имеет все частные производные порядка p такие, что вдоль всех направлений l, при некоторой константе M, $\Omega_\varphi(\delta;f_l^{(p)})\leqslant M\delta^\gamma$ $(0<\gamma\leqslant 2)$, то

$$E_\sigma(f;\varphi)\leqslant\frac{CM}{\sigma^{p+\gamma}}\quad(C\text{ — константа}).\qquad(2)$$

2) Если функция $f\in C_\varphi$ удовлетворяет неравенству (2), в котором p — целое и $0<\gamma\leqslant 1$, то существует целая функция $g_{\sigma_0}(z_1,\ldots,z_n)$, имеющая в смысле, указанном в неравенстве (1), конечную степень σ_0, и такая, что

$$f(x_1,\ldots,x_n)=g_{\sigma_0}(x_1,\ldots,x_n)+h(x_1,\ldots,x_n),$$

где $h(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)\in C_\varphi$ и вдоль всех направлений l производные $h_l^{(p)}(x_1,\ldots,x_n)$ порядка p удовлетворяют неравенству $\omega_\varphi(\delta;h_l^{(p)})\leqslant A\delta^\gamma$ (A — константа), если $0<\gamma<1$, и неравенству

$$\omega_\varphi(\delta;h_l^{(p)})\leqslant A\delta\ln\frac{1}{\delta},$$

если $\gamma=1$. *А. Ф. Тиман*

1147. Об одном сходящемся процессе приближения непрерывных функций. Миракьян Г. М., Докл. АН Арм. ССР. 1953, **16**, № 2, 33—37

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, a]$, то

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{n,\,m_n}(x)=f(x),$$

где

$$\varphi_{n,\,m_n}(x)=\sum_{k=0}^{m_n}\frac{n^k}{k!}\,x^{2k}\,e^{-nx^2}\,f\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right),$$

$$\sqrt{\frac{m_n}{n}} \leqslant a < \sqrt{\frac{m_n+1}{n}}.$$

М. А. Евграфов

1148. О сходимости линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций. **Коровкин П. П.**, Докл. АН СССР, 1953, 90, № 6, 961—964

Пусть

$$L_n(f) = \int_a^b f(y)\, d\varphi_n(x, y),$$

где $\varphi_n(x, y)$ $(a \leqslant x, y \leqslant b;\ n = 1, 2, \ldots)$ — функция, не убывающая по y при любом x. Система непрерывных на $[a, b]$ функций $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ образует систему Чебышева, если все полиномы $a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$ $(|a_0| + |a_1| + |a_2| > 0)$ имеют на $[a, b]$ не более двух нулей.

Автор утверждает (в теореме 2), что последовательность $L_n(f)$ равномерно сходится к $f(x)$, где $f(x)$ — любая непрерывная на $[a, b]$ функция, если равномерно сходятся три какие-либо последовательности $L_n(f_k)$, $k = 0, 1, 2$, соответственно к $f_k(x)$, где функции $f_k(x)$ образуют систему Чебышева. Доказательство этого утверждения проведено (теорема 1) для случая $f_0(x) \equiv 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$. Для случая, когда $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ не образуют системы Чебышева, конструируется оператор $L(f)$ и функция $\hat{f}(x)$ такие, что $L(f_k) \equiv f_k(x)$, $k = 0, 1, 2$, но $L(\hat{f}) \not\equiv \hat{f}(x)$.

Во второй половине статьи формулируется аналогичное теореме 2 предложение для случая, когда система Чебышева составлена из периодических функций. В качестве приложения полученных результатов приводится обобщение одной теоремы о множителях сходимости для рядов Фурье (см. Натансон И. П., «Конструктивная теория функций, Гостехиздат, 1949, 272—276).

Во второй части статьи имеются неточности, существенно искажающие смысл:

на стр.	в строке снизу	вместо	должно быть
963	18	$a \leqslant x \leqslant b$.	$a \leqslant x < b$
963	9	3) $\sum_{k=0}^{n} \rho_k^{(n)} \cos kx \geqslant 0$	3) $\rho_0^{(n)} + 2\sum_{k=1}^{n} \rho_k^{(n)} \cos kx \geqslant 0$.

М. А. Красносельский

1149. Классы бесконечно дифференцируемых почти периодических функций с заданным спектром. **Лалагю** (Classes de fonctions indéfiniment dérivables presque périodiques de spectre donné. Lalaguë Pierre), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 26, 2473—2475 (франц.)

Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, почти периодическая по Бору вместе со всеми своими производными, спектр E которой положителен. Тогда, если $|f^{(n)}(x)| \leqslant M_n$ $(-\infty < x < \infty;\ n = 1, 2, \ldots)$, причем

$$\sup_{\lambda \in E} \lambda \leqslant \lim_{n \to \infty} M_n^{1/n},$$

то и $|f^{(n)}(x)| \leqslant 6e^2\, n M_n^E$, где «исправленная» последовательность

$$M_n^E = \sup_{\lambda \in E} \lambda^n / T(\lambda),\ T(r) = \sup_{k \geqslant 1} r^k / M_k,\ r > 0.$$

При помощи этой оценки устанавливается следующий результат, напоминающий известную теорему Мандельбройта о совпадении классов $C_{\{m_n\}}$ для случая периодических функций (Мандельбройт С., Квазианалитические классы функций, ОНТИ, М.— Л., 1937):

Обозначим через $C^E\{M_n\}$ класс бесконечно дифференцируемых почти периодических вместе со всеми своими производными функций, спектр которых расположен на множестве E положительной полуоси, а производные удовлетворяют неравенствам $|f^{(n)}(x)| \leqslant c^n M_n$; $n = 1, 2, \ldots$, $M_n^{1/n} \to \infty$, где c — зависящая от f константа. Для того чтобы $C^E\{M_n\} \subset C^E\{M_n'\}$, необходимо и достаточно, чтобы $(M_n^E)^{1/n} = O(M_n'^{1/n})$ при $n \to \infty$.

Устанавливаются также аналогичные результаты для специального случая, когда множеством E служит последовательность λ_i такая, что $\lambda_{i+1}/\lambda_i \geqslant k > 1$. *Ю. М. Березанский*

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

1150. Замечания об обращении преобразований Фурье — Стилтьеса. **Хьюитт** (Remarks on the inversion of Fourier — Stieltjes transforms. Hewitt Edwin), Ann. Math., 1953, 57, № 3, 458—474 (англ.)

Изучается формула обращения преобразований Фурье — Стилтьеса для функций, заданных на коммутативной локально компактной группе. Автор ограничивается рассмотрением следующих аддитивных групп: k-мерного евклидова пространства, группы действительных чисел по модулю 2π и группы целых чисел.

Повидимому, автору неизвестны результаты Д. А. Райкова (Тр. Мат. ин-та им. Стеклова, 1945, 14). *Б. В. Гнеденко*

1151. Формулировка краевых условий при помощи интеграла Фурье. **Хелуит** (Boundary conditions in the Fourier integral formulation. Helwig W. F.), Texas J. Sci., 1953, 5, № 1, 102—105 (англ.)

Рассматриваются основные применения операционного исчисления к исследованию нестационарных явлений в электрических цепях. Изложенное можно найти в учебниках по операционному исчислению. *Э. Я. Риекстыньш*

1152. Некоторые итерации преобразования Лапласа. **Босе** (Une chaîne de transformations de Laplace. Bose S. K.), Bull. sci. math., 1953, сер. 2, 77, 81—89 (франц.)

В известных обозначениях

$$\varphi(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt \div f(t)$$

доказываются следующие теоремы:

1. Если $\varphi(p) \div f_1(t)$, $\sqrt{p} f_1\left(\frac{1}{p}\right) \div f_2(t)$, $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}} f_2\left(\frac{1}{4p^2}\right) \div f_3(t), \ldots, \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}} f_{n-1}\left(\frac{1}{4p^2}\right) \div f_n(t)$, то $\varphi(p^{2n-1}) \div \frac{\sqrt{\pi}}{2} t f_n\left(\frac{t^2}{4}\right)$.

Здесь предполагается, что все соответствующие интегралы Лапласа сходятся для $\mathrm{Re}\ p > 0$ и что сходятся интегралы ($r = 2, 3, \ldots, n$)

$$\int_0^\infty e^{-pt}\left| f_r\left(\frac{t^2}{4}\right)\right| dt,\ \mathrm{Re}\ p > 0,\ \text{и}$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{x}} |f_r(t)|\,dt,\ x > 0.$$

Доказательство основывается на легко проверяемом соотношении $\varphi(p^2) \div \frac{\sqrt{\pi}}{2} t f_2\left(\frac{t^2}{4}\right)$.

2. Если $\varphi(p) \div f_1(t)$, $\sqrt{p} f_1\left(\frac{1}{p}\right) \div f_2(t)$, $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}} f_2\left(\frac{1}{4p^2}\right) \div f_3(t), \ldots, \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}} f_{n-1}\left(\frac{1}{4p^2}\right) \div f_n(t)$ и если $\psi(p) \div \chi(t)$, то

$$\int_0^\infty \varphi(u^{2n-1})\chi(u)\frac{du}{u} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty \psi(v) f_n\left(\frac{v^2}{4}\right) dv.$$

Здесь, в дополнение к условиям теоремы 1, еще предполагается, что оба последних интеграла сходятся абсолютно.

Эта теорема является следствием теоремы 1 и отношения

$$\int_0^\infty \beta(u)\chi(u)\frac{du}{u} = \int_0^\infty \alpha(v)\psi(v)\frac{dv}{v},$$

где $\psi(p) \div \chi(t)$, $\beta(p) \div \alpha(t)$ ($\mathrm{Re}\ p > 0$).

Приводятся три частных случая теоремы 2, из которых отметим следующий:

$$\int_0^\infty \psi(v)\sin\frac{bv}{2}\,dv = b\int_0^\infty \frac{4\chi(u)}{\left(u^2 + \frac{b^2}{4}\right)^2} du.$$

3. Если $\varphi(p) \div f_1(t)$, $\sqrt{p} f_1\left(\frac{1}{p}\right) \div f_2(t)$, $f_2(p) \div g(t)$, то

$$\varphi(p^2) = 3\sqrt{\pi}\, p\int_0^\infty e^{2t^2} D_{-4}\left(p\sqrt{2t}\right) g(t)\frac{dt}{t^2}, \quad (1)$$

где

$$D_{-n}(z) = \frac{e^{-\frac{1}{4}z^2}}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{-zx-\frac{x^2}{4}} x^{n-1}\,dx,\ \mathrm{Re}\ z > 0.$$

Здесь предполагается, что все соответствующие интегралы Лапласа сходятся абсолютно для $\mathrm{Re}\ p > 0$, что интегралы

$$\int_0^\infty e^{-pt}\, t\left| f_2\left(\frac{t^2}{4}\right)\right| dt,\ \mathrm{Re}\ p > 0,\ \text{и}$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{x}} |f_2(t)|\,dt,\ x > 0,$$

также являются сходящимися и что интеграл в правой части (1) сходится абсолютно для $\mathrm{Re}\ p > 0$.

В качестве примера указывается следующий частный случай равенства (1):

$$\int_0^\infty e^{\frac{p^2}{2t}} D_{-4}\left(p\sqrt{2t}\right)\left\{2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\, e^{-\frac{a^2}{4t}} - a\,\mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right\}\frac{dt}{t^2} = \frac{2}{3(2p+a)},$$

$\mathrm{Re}\ p > 0$, $\mathrm{Re}\ a > 0$.

4. Если $\varphi_r(p) \div t^r f(t)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ ($\varphi_0(p) \equiv \varphi(p)$), то

$$\frac{p}{p+q}\varphi(p+q) = \sum_{r=0}^\infty \frac{(-1)^r q^r}{r!}\varphi_r(p),$$

причем предполагается, что $f(t)$ непрерывна для $t > 0$, $f(t) = O(t^\mu)$, $\mu > 0$, при $t \to +0$ и что $e^{-(p+q)t} f(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

В частности,

$$e^{\frac{1}{8}[(p+q)^2 - p^2]} D_{-1}\left(\frac{p+q}{\sqrt{2}}\right) = \sum_{r=0}^\infty \frac{(-1)^r q^r}{r!\, 2^{\frac{r}{2}}} D_{-r-1}\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right).$$

Статья содержит несколько опечаток. *В. И. Левин*

1153. Формулы обращения для одного обобщенного интеграла Лапласа. Саксена (Inversion formulae for a generalized Laplace integral. Saksena K. M.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1953, 19, № 2, 173—181 (англ.)

Даются три формулы для обращения преобразования

$$f(s) = \int_0^\infty (st)^{m-1/2} e^{-1/2st} W_{k,m}(st)\,\varphi(t)\,dt \quad (1)$$

($\mathrm{Re}\ m \geqslant 0$, s — вещественное).

Из них наиболее удобна следующая:

Если а) $\varphi(x)$ имеет ограниченное изменение вблизи $x = t$ $(t > 0)$,

б) $\varphi(t) = \begin{cases} O(t^{\rho}) \text{ при } t \to 0 \ (\mathrm{Re}\,\rho > -1), \\ O(e^{-t^{\nu}}) \text{ при } t \to \infty \ (\mathrm{Re}\,\nu > 0), \end{cases}$

в) интегралы $\int_0^\infty x^{c-1}\varphi(x)\,dx$ $(c < 1)$ и

г) $\int_0^\infty x^{-(c+i\tau)} f(x)\,dx$ $(-\infty < \tau < +\infty)$ абсолютно сходятся, то имеет место формула

$$\frac{1}{2}[\varphi(t+0) + \varphi(t-0)] = \frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to\infty}\int_{c-ir}^{c+ir} \frac{\Gamma(m-k-l+{}^3/_2)}{\Gamma(2m-l+1)\,\Gamma(1-l)}\,t^{-l}dl \times \times \int_0^\infty s^{-l} f(s)\,ds. \qquad (2)$$

Так как при доказательстве формулы (2) интеграл (1) считается несобственным только относительно своих пределов, то, учитывая условие б), было бы проще заменить условие в) требованием $-\mathrm{Re}\,\rho < c < 1$.

Вторая формула работы вызывает сомнение, ибо одна из промежуточных формул содержит ряд ${}_1F_0(1, -p/t^{n+1})$, который расходится при $|p/t^{n+1}| > 1$ $(0 \leqslant t \leqslant \infty)$. *Э. Я. Риекстыньш*

1154. Частотные функции Полиа. III. Положительность определителей смещения с приложением к задаче интерполирования сращенными кривыми. Шёнберг, Уитни (On Pólya frequency functions. III. The positivity of translation determinants with an application to the interpolation problem by spline curves. Schoenberg I. J., Whitney Anne). Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **74**, № 2, 246—259 (англ.)

Неотрицательная измеримая функция $\Lambda(x)$, удовлетворяющая неравенству

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(x)\,dx < \infty,$$

называется частотной функцией Полиа, если она удовлетворяет условию: для любых двух систем возрастающих чисел

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n, \quad y_1 < y_2 < \ldots < y_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (1)$$

имеет место неравенство

$$D = \det \| \Lambda(x_i - y_j) \|_1^n \geqslant 0. \qquad (2)$$

Изучаются две частотные функции Полиа Λ_1 и Λ_2, осуществляющие преобразования

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xs}\Lambda_1(x)\,dx = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_\nu s} \qquad (3)$$

$(\delta_\nu$ вещественны; $\sum_1^\infty |\delta_\nu| < \infty)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xs}\Lambda_2(x)\,dx = \frac{1}{\Psi(s)}, \qquad (4)$$

где $\Psi(s)$ — целая функция вида

$$\Psi(s) = Ce^{-\gamma s^2 + \delta s}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+\delta_\nu s)e^{-\delta_\nu s}$$

$(0 < \gamma + \sum_1^\infty \delta_\nu^2 < \infty;\ C > 0,\ \gamma \geqslant 0,\ \delta, \delta_\nu$ вещественны).

Доказывается, что:

1) Если k и h — соответственно, число положительных и отрицательных δ_ν в формуле (3) $(0 \leqslant k \leqslant \infty,\ 0 \leqslant h \leqslant \infty,\ k + h > 1)$, то для функции $\Lambda_1(x)$ определитель $D > 0$ тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$x_{\nu-k} < y_\nu < x_{\nu+h} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$x_r = -\infty \text{ при } -\infty \leqslant r < 1,$$

$$x_r = +\infty \text{ при } n < r \leqslant +\infty.$$

2) Для функции $\Lambda_2(x)$ величина D всегда положительна.

Случай 1) связан с теоремой М. Г. Крейна и Г. М. Финкельштейна (Докл. АН СССР, **24**, 220—223). Полученные результаты используются для решения задачи о точечном интерполировании «сращенными» кривыми. Пусть $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ вещественные числа и k — целое натуральное число. Пусть функция $F(x)$ в каждом интервале $(-\infty, c_1), (c_1, c_2), \ldots, (c_n, +\infty)$ есть многочлен степени не выше k и непрерывна на всей вещественной оси вместе со своими первыми $k-1$ производными. Тогда $F^{(k)}(x)$ будет ступенчатой вообще с разрывами в точках c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Такая функция называется сращенной функцией, график ее — сращенной кривой, а точки c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — ее узлами.

Устанавливается, что если задано $n + k + 1$ абсцисс $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+k+1}$ и соответственно $n + k + 1$ ординат $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n+k+1}$, то построение интерполяционной «сращенной» кривой возможно тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$x_i < c_i < x_{i+k+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

При $n = 0$ получается как частный случай классическая задача о нахождении полинома Ньютона, при $k = 1$, $n \neq 0$ — интерполирование при помощи ломаной. *П. Д. Калафати*

1155. О некоторых функциональных интегральных уравнениях. Пародн (Sur certaines équations intégrales fonctionnelles. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 18, 1729—1731 (франц.)

Дается развитие операционного метода для построения решения функционального уравнения

$$f(\alpha t) + \lambda \int_0^\infty k(x,t)\, f(x)dx = g(t), \qquad (1)$$

где $g(t)$ — заданная функция, $\alpha = \text{const}$, а ядро $k(x,t)$ имеет преобразование Лапласа типа $\rho(s)e^{-x\psi(s)}$.

В частном случае, когда $k(x,t) = t^{\nu/2}x^{-\nu/2}J_\nu(2\sqrt{tx})$, строится в явном виде решение уравнения (1).

А. В. Бицадзе

1156. Новое доказательство теоремы Титчмарша о свертке. Микусинский (A new proof of Titchmarsh's theorem on convolution. G.-Mikusiński J.), Studia math., 1953, **13**, № 1, 56—58 (англ.)

Дается новое доказательство следующей теоремы Титчмарша:

Если функции f и g в интервале $(0, T)$ интегрируемы и если

$$\int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau = 0$$

почти всюду в $(0, T)$, то $f(t) = 0$ почти всюду в интервале $(0, t_1)$ и $g(t) = 0$ почти всюду в интервале $(0, t_2)$, причем $t_1 + t_2 \geqslant T$.

В отличие от доказательства Титчмарша, приводимое доказательство не основано на теории функций комплексного переменного. При доказательстве применяется следующая теорема анализа:

Если

$$\left| \int_0^T e^{a_n t}\, f(t)\, dt \right| \leqslant M,$$

причем $a_1 > 0$, $a_{n+1} - a_n > \varepsilon > 0$ и

$$\sum_1^\infty \frac{1}{a_n} = \infty,$$

то $f = 0$ почти всюду в интервале $(0, T)$.

Б. М. Левитан

1157. Одна теорема о свертке функций многих переменных. Микусинский, Рыл-Нардзевский (Un théorème sur le produit de composition des fonctions de plusieurs variables. G.-Mikusiński J., Ryll-Nardzewski C.), Studia math., 1953, **13**, № 1, 62—68 (франц.)

Доказывается следующая теорема:

Пусть $f(t_1, \ldots, t_n)$ и $g(t_1, \ldots, t_n)$ — суммируемые функции на симплексе

$$S_a\colon\ 0 < t_i\ (i = 1, \ldots, n),\ t_1 + t_2 + \ldots + t_n < a,$$

и пусть свертка

$$\int_0^{t_1} d\tau_1 \ldots \int_0^{t_n} d\tau_n f(t_1 - \tau_1, \ldots, t_n - \tau_n)\, g(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

обращается в нуль почти всюду на S_a. Тогда $f(t_1, \ldots, t_n) = 0$ почти всюду на S_b и $g(t_1, \ldots, t_n) = 0$ почти всюду на S_c, причем $b + c \geqslant a$.

В случае $n = 1$ теорема была доказана Титчмаршем (см. реф. 1156).

В реферируемой работе доказательство проводится средствами теории функций действительного переменного.

Б. М. Левитан

См. также: 1011, 1018 **РЕЦ,** 1030 **РЕЦ,** 1126, 1159, 1160, 1165, 1229, 1231, 1245, 1248, 1256, 1260 **РЕЦ,** 1262 **РЕЦ,** 1271, 1274, 1277, 1278, 1389, 1411

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1158. Замечание к заметке «Об одном вопросе проф. В. Н. Депутатова». Попов И. В., Усп. мат. наук, 1953, **8**, № 3 (55), 151

Приводится пример элементарной функции

$$F(z) = \frac{1}{e^{e^{(\alpha+i\beta)\operatorname{Ln} z}} - 1}$$

(где α, β — действительные иррациональные числа), полюсы которой расположены всюду плотно на плоскости z.

1159. Некоторые результаты, относящиеся к функции Миттаг-Леффлера. Эмбер (Quelques résultats relatifs à la fonction de Mittag-Leffler. Humbert Pierre), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 15, 1467—1468 (франц.)

Обозначим

$$\mathcal{E}_\alpha(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}.$$

Автор, используя преобразование Лапласа, выводит формулы:

1. $\mathcal{E}_\alpha(t^\alpha) - 1 = \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(x^\alpha) \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dx;$

2. $t = \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(x^\alpha)\left[1 - \frac{(t-x)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right] dx;$

3. $\mathcal{E}_\alpha(t^\alpha) = \mathcal{E}_{2\alpha}(t^{2\alpha}) + \int_0^t \mathcal{E}_{2\alpha}(x^{2\alpha}) \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dx;$

4. $\mathcal{E}_{\frac{\alpha}{2}}(t^{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \mathcal{E}_\alpha(x^\alpha)\, e^{-\frac{x^2}{4t}} dx.$

М. А. Евграфов

1160. Вычисление одного классического бесконечного произведения. Трикоми (Determinazione del valore di un classico prodotto infinito. Tricomi Francesco G.), Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. sci., fis. mat e natur., 1953, **14**, № 1, 3—7 (итал.)

Целая функция нулевого порядка

$$f(z)=\prod_1^\infty\left(1-\frac{z}{a^n}\right)\quad(a>1)$$

(известная уже Эйлеру) и мероморфная функция

$$g(z)=z\sum_1^\infty\frac{1}{a^n-z}$$

связаны между собой тождествами:

$$g(z)=-z\frac{f'(z)}{f(z)},\quad f(z)=\exp\left\{-\int_0^z\frac{g(z)}{z}\,dz\right\}.$$

Эти функции удовлетворяют функциональным уравнениям

$$g(az)=g(z)+\frac{z}{1-z},\quad f(az)=(1-z)f(z),$$

из которых вытекают степенные разложения:

$$g(z)=\sum_1^\infty\frac{z^n}{a^n-1},$$

$$f(z)=1+\sum_1^\infty\frac{(-z)^n}{(a-1)(a^2-1)\dots(a^n-1)}.$$

Автор находит для некоторых значений функции $f(z)$ выражения через эллиптические тэта-функции:

$$f(1)=\left(\frac{\theta_1'(0)}{-2\pi}\right)^{1/3}a^{1/24},$$

$$f(-1)=\sqrt{\frac{\theta_2(0)}{2f(1)}}\,a^{1/6},\quad f(-\sqrt{a})=\sqrt{\frac{\theta_3(0)}{f(1)}},$$

$$f(\sqrt{a})=\sqrt{\frac{\theta_4(0)}{f(1)}}$$

(причем параметр тэта-функций q равен $\frac{1}{\sqrt{a}}$).

Указывается также на связь функции $f(z)$ с «новой трансцендентной функцией, введенной в бактериологии» (Tricomi F. G., Rend. Seminar mat. Univ. e Politecn. Torino, 1951—1952, **11**, 35—46),

$$G(z)=\sum_1^\infty\frac{1}{a^n-1}\frac{z^n}{n!};$$

а именно, функции $f(z)$ и $G(z)$ связаны соотношением:

$$f(z)=\exp\left\{-\int_0^z e^{-t}zG(t)\frac{dt}{t}\right\}.$$

В. Л. Гончаров

1161. Некоторые приемы исследования распределения корней трансцендентных уравнений. Лабазин В. Г., Вестн. ЛГУ, сер. мат., физ. и хим., 1953, № 2, 3—15

При помощи введения вспомогательного вещественного параметра исследуется способ определения числа корней уравнения

$$P(z)\operatorname{ch}z+Q(z)\operatorname{sh}z=0,$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — вещественные полиномы, расположенных слева и справа от мнимой оси. Этот способ хорошо известен и состоит в том, что левая часть уравнения включается в семейство функций $F(z;\tau)=u(x,y;\tau)+iv(x,y;\tau)$, $z=x+iy$, зависящее от переменного параметра τ, так что

$$F(z;\tau_1)=P(z)\operatorname{ch}z+Q(z)\operatorname{sh}z.$$

Если известно распределение по полуплоскостям корней уравнения $F(z;\tau_0)=0$ при некотором значении τ_0, то исследование сводится к определению числа переходов корней уравнения $F(z;\tau)=0$ из левой полуплоскости в правую и обратно, когда τ меняется от τ_0 до τ_1. В свою очередь направление перехода корня определяется знаком производной $dx/d\tau$ для чисто мнимого значения корня, т. е. нужно знать все чисто мнимые корни уравнения $F(z;\tau)=0$ при всех τ на интервале (τ_0,τ_1) и знак $dx/d\tau$ в этих точках.

Автор выводит равенство

$$\operatorname{sign}\frac{dx}{d\tau}=\operatorname{sign}\Omega\quad\left(\Omega=\frac{\partial v}{\partial\tau}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial\tau}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

и применяет это равенство к исследованию семейств

$$P(z)\operatorname{ch}z+\tau Q(z)\operatorname{sh}z\ \text{ и }\ P(z)-Q(z)e^{-\tau z}.$$

В обоих случаях не учитывается обращение в нуль функции Ω в точке $z=0$.

Общее аналитическое решение вопроса о распределении по полуплоскостям нулей квазиполинома в свое время было дано Н. Г. Чеботаревым (см., например, Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н., Тр. Мат. ин-та им. Стеклова, 1949, **26**, гл. VII).

Н. Н. Мейман

1162. Некоторые теоремы единственности. Сиддики (Quelques théorèmes d'unicité. Siddiqi Jamil Ahmad), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 18, 1727—1729 (франц.)

Получены две теоремы единственности:

1. Пусть $F(z)$ регулярна при $\operatorname{Re}z>0$ и непрерывна при $\operatorname{Re}z\geqslant 0$, $\ln|F(z)|\leqslant mx\ln xk(x)+\sigma(r)$ $(x=\operatorname{Re}z,\quad r=|z|)$, $k(x)$ и $\sigma(r)$ монотонно возрастают и

$$\int^\infty\sigma(r)r^{-2}dr<\infty.$$

Пусть далее $F(\lambda_n)=0$ $(\lambda_n\geqslant 0,\ n(t)=\sum_{\lambda_n<t}1=O(t))$, причем $n(t)\geqslant mt\left(\frac{1}{2}+\delta(t)\right)$, $\delta(t)$ стремится к нулю, монотонно убывая.

Если существует функция $\omega(r)$ (непрерывная и монотонно стремящаяся к нулю с возрастанием r) такая, что

$$\int^\infty[\omega(r)]^2r^{-1}dr<\infty,$$

$$\ln k(r)=O\left(\exp\int^r\frac{\omega(t)}{t}\,dt\right)\qquad(r\to\infty),$$

$$\int^\infty\left\{\ln\omega(r)\,k(r)-\frac{2\delta(r)}{\pi\omega(r)}\right\}d\left(\exp\left(-\frac{\pi}{2}\int^r\frac{\omega(t)}{t}\,dt\right)\right)=\infty,$$

то $F(z)\equiv 0$.

2. Пусть $F(z)$ регулярна при $\operatorname{Re} z > 0$ и непрерывна при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$,
$\ln |F(z)| \leqslant mx \ln x + Ax + \sigma(r)$ $(x = \operatorname{Re} z,\ r = |z|)$,
$\sigma(r)$ монотонно возрастает и $\int^{\infty} \sigma(r)\, r^{-2}\, dr < \infty$.

Пусть далее $F(\lambda_n) = 0$, а $n(t) = \sum_{\lambda_n < t} 1 \geqslant mt(1/2 - \delta(t))$, где $\delta(t)$ — убывающая функция, стремящаяся к нулю.

Если существует (непрерывная и убывающая функция) $\omega(r)$ такая, что

$$\int^{\infty} [\omega(r)]^2 r^{-1}\, dt < \infty,$$

$$\int^{\infty} \left\{\ln \omega(r) - \frac{2\delta_1(r)}{\pi\omega(r)}\right\} d\left\{\exp\left(-\frac{\pi}{2}\int^{r} \frac{\omega(t)}{t}\, dt\right)\right\} = \infty$$

$$\left(\delta_1(r) = 2\int_0^{\infty} \delta(ru)\, \frac{1+u^2}{1+u^4}\, du\right),$$

то $F(z) \equiv 0$.

Основным средством при доказательстве этих теорем является следующий найденный автором результат:

Обозначим через $D(\omega)$ область $\cos\varphi > \frac{\pi}{2}\omega(r)$ $(z = re^{i\varphi})$, $r > r_0$ $(r_0 \geqslant 0)$, где $\omega(r)$ — неотрицательная функция, монотонно стремящаяся к нулю при $r \to \infty$ и такая, что

$$\int^{\infty} [\omega(r)]^2 r^{-1}\, dr < \infty.$$

Пусть $F(z)$ регулярна в $D(\omega)$ и непрерывна в $\overline{D}(\omega)$, $\ln |F(z)| = O\left(r \exp\left(\int^{r} \omega(u)\, u^{-1}\, du\right)\right)$ $(r \to \infty)$ в $D(\omega)$ и $F(z) = O(e^{-a(r)})$ ($a(r)$ — положительная возрастающая функция) на границе $D(\omega)$. Тогда, если

$$\int^{\infty} \frac{a(r)}{r^2} \exp\left(-\frac{\pi}{2}\int^{r} \frac{\omega(t)}{t}\, dt\right) dr = \infty,$$

то $F(z) \equiv 0$.

Это предложение содержит в себе как частный случай (при $\omega(r) = 0$, $r_0 = 0$, $a(r) = a$) известную теорему Карлсона. *М. А. Евграфов*

1163. Ряды по многочленам Фабера, коэффициенты которых принимают конечное число значений. Илиев Любомир, Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 4, 499—502

Пусть граница области G есть правильная аналитическая кривая C, а многочлены Фабера $\{\Phi_n(z)\}$ для области G определяются при отображении дополнения области G на дополнение единичного круга.

Доказывается следующее обобщение известной теоремы Сеге о степенных рядах:

Если коэффициенты ряда

$$f(z) = \sum_0^{\infty} c_n \Phi_n(z)$$

принимают конечное число различных значений и значения членов последовательности $\{c_n\}$ после каждого индекса следуют непериодически, то кривая C является естественной границей функции $f(z)$. *П. К. Суетин*

1164. Линейные функционалы и проблемы аналитического продолжения. Дейвис, Поллак (Linear functionals and analytic continuation problems. Davis Philip, Pollak Henry), Pacif. J. Math., 1953, 3, № 1, 47—72 (англ.)

Авторы переносят на случай разложений аналитических функций в ряды по ортонормальным системам в произвольных областях некоторые результаты, известные для ряда Тейлора в круге. Сначала приводятся вспомогательные результаты, формулируемые без доказательства (доказательства этих результатов, как пишут авторы, появятся в J. analyse math.). Пусть B — область в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Положим

$$(f, g) = \iint_B f(z)\, \overline{g(z)}\, dx\, dy; \qquad \|f\| = (f, f)^{1/2}$$

и обозначим через $L^2(B)$ класс аналитических и однозначных в B функций $f(z)$, для которых $\|f\| < +\infty$. Пусть S — некоторый класс аналитических функций, который шире, чем $L^2(B)$. Допустим, что дано множество линейных функционалов $\{L_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, которые определены на S и удовлетворяют условиям: а) каждый L_n ограничен на $L^2(B)$, б) множество $\{L_n\}$ является линейно независимым на $L^2(B)$. Для любого целого $n \geqslant 0$ определяется экстремальная проблема Q_n: среди функций класса $L^2(B)$, удовлетворяющих условиям $L_0(\varphi) = L_1(\varphi) = \ldots = L_{n-1}(\varphi) = 0$, $L_n(\varphi) = 1$, найти ту, норма которой ($\|\varphi\|$) наименьшая.

Теорема 1. При условиях а) и б) проблема Q_n имеет для каждого целого $n \geqslant 0$ единственное решение $\varphi_n(z)$. Множество минимальных функций $\{\varphi_n(z)\}$ ортогонально над B ($(f_n, f_m) = 0$, если $n \neq m$). Это множество полно в $L^2(B)$ тогда и только тогда, когда множество $\{L_n\}$ полно над $L^2(B)$.

Положив $\varphi_n^*(z) = \varphi_n(z) / k_n$, где $k_n = \|\varphi_n\| = [L_n(\varphi_n^*)]^{-1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, придем к ортонормальной системе $\{\varphi_n^*(z)\}$.

Если положить:

$$L_n^*(f) = \begin{vmatrix} L_0(\varphi_0^*) & 0 & 0 \ldots & L_0(f) \\ L_1(\varphi_0^*) & L_1(\varphi_1^*) & 0 \ldots & L_1(f) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_n(\varphi_0^*) & L_n(\varphi_1^*) & L_n(\varphi_2^*) \ldots & L_n(f) \end{vmatrix} \cdot k_0 k_1 \ldots k_n,$$

то система функционалов $\{L_n^*\}$ (определенных над S) биортогональна с $\{\varphi_n^*\}$. Если $f \in L^2(B)$, то $L_n^*(f) = (f, \varphi_n^*)$. Таким образом, $L_n^*(f)$ можно рассматривать для функции $f \in S \setminus L^2(B)$ как обобщенные коэффициенты Фурье по системе $\{\varphi_n^*\}$.

Теорема 2. Если система $\{L_n^*\}$ полна над S, то функция $f(z)$ из S принадлежит $L^2(B)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_0^\infty |L_n^*(f)|^2 < +\infty.$$

При помощи теорем 1 и 2 авторы дают схемы построения критериев (в терминах коэффициентов $L_n^*(f)$) того, чтобы функция $f(z)$ имела на границе области B особенности в фиксированном множестве точек, в частности, имела бы границу области B в качестве своей естественной границы.

Теорема 3. Пусть $f(z)$ — некоторая функция, регулярная в B и обладающая обобщенными коэффициентами Фурье $a_n = L_n^*(f)$ $(n = 0, 1, \ldots)$, причем $f(z) \notin L^2(B)$. Тогда существует такая последовательность чисел $\{\varepsilon_n\}$, где $\varepsilon_n = +1$ или $\varepsilon_n = -1$, что если числа $a_n^* = \varepsilon_n a_n$, $n = 0, 1, \ldots$, являются обобщенными коэффициентами Фурье некоторой функции $f^*(z)$, регулярной в области B, то функция $f^*(z)$ не может быть продолжена за границу области B.

Эта теорема является обобщением (в несколько ослабленной форме) известной теоремы Фату — Полиа о рядах Тейлора в круге. Заметим, что из условия $a_n = L_n^*(f)$ не следует, вообще говоря, существование функции $f^*(z)$, для которой $\varepsilon_n a_n = L_n^*(f^*)$. Однако для каждой области B, ограниченной конечным числом жордановых кривых, существуют полные ортонормальные системы, для которых из $a_n = L_n^*(f)$ при любой $\{\varepsilon_n\}$, $|\varepsilon_n| = 1$, вытекает существование функции $f^*(z)$, для которой $L_n^*(f^*) = \varepsilon_n a_n$, $n = 0, 1, \ldots$ Последнее замечание следует из предложения:

Пусть область B ограничена конечным числом жордановых кривых без общих точек и содержит точку 0. Пусть $\{\alpha_n\} \subset B$, $\lim \alpha_n = 0$. Положим $L_n(f) = f(\alpha_n)$ и построим ортонормальную систему $\{\varphi_n^*\}$ методом теоремы 1. Тогда каждой $f(z)$, регулярной в B, соответствует ряд $f(z) \sim \sum_0^\infty L_n^*(f)\,\varphi_n^*(z)$, равномерно сходящийся к $f(z)$ внутри B, причем

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|L_n^*(f)|} \leqslant 1.$$

Обратно, из

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|L_n^*(f)|} \leqslant 1$$

следует сходимость ряда внутри B. Аналогичный результат имеет место, если $L_n(f) = f^{(n)}(0)/n!$. Эти результаты обобщают классические факты из теории ряда Тейлора.

Доказывается также теорема о лакунарных рядах:

Теорема 4. Дана последовательность $\{\alpha_n\}$, причем $|\alpha_n| \geqslant \alpha > 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$; тогда существует последовательность $\{\delta_n\}$, где $\delta_n = 0$ или 1, такая, что, если $\delta_n \alpha_n$ есть обобщенные коэффициенты Фурье функции $f^*(z)$, регулярной в B: $L_n^*(f) = \delta_n \alpha_n$, $n = 0, 1, \ldots$, то $f^*(z)$ не может быть продолжена за границу B (относительно ортонормальной системы $\{\varphi_n^*(z)\}$ в этой теореме делается небольшое дополнительное предположение).

С. Я. Хавинсон

1165. К вопросу о весовом приближении средними квадратичными в области комплексного аргумента. Шагинян А. Л., Докл. АН Арм. ССР, 1953, 16, № 1, 3—8

Доказывается, что если D — ограниченная односвязная область, граница которой является полной границей для дополнительной области, содержащей бесконечно удаленную точку, $p(z)$ — произвольный полином и $f(z)$ — любая регулярная в D функция, для которой

$$\iint_D |p(z) f(z)|^2 d\sigma < \infty,$$

то справедливо соотношение

$$\inf_{B_n(z)} \iint_D |p(z)|^2 |f(z) - B_n(z)|^2 d\sigma = 0,$$

в котором нижняя грань берется по семейству всех полиномов $B_n(z)$.

А. Ф. Тиман

1166. Некоторые задачи теории функций и сингулярные интегральные уравнения. Квесела-ва Д. А., Вестн. АН СССР, 1953, № 4, 108

Краткий обзор докторской диссертации, защита которой состоялась в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР.

1167. Задача Римана с положительно определенной матрицей. Шмульян Ю. Л., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 2(54), 143—145

Ф. Д. Гахов высказал предположение (Усп. мат. наук, 1952, 7, № 4(50), 3—54), что частные индексы задачи Римана с матрицей $A(t)$ тесно связаны с индексами характеристических функций этой задачи; более того, он заметил, что для ряда частных примеров они просто равны. Автор реферируемой работы на частном примере показывает, что последнее утверждение Ф. Д. Гахова о равенстве частных индексов не всегда имеет место. Далее автор показывает, что имеет место следующее утверждение:

Если L — единичная окружность, а $A(t) = \|a_{ij}\|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ — положительно определенная матрица, удовлетворяющая условию Гёльдера, то все частные индексы задачи Римана $\varphi^+(t) = A(t)\varphi^-(t)$ равны нулю.

На основе этой теоремы автор показывает, что если на единичной окружности L задана положительно определенная матрица $A(t) = \|a_{ij}\|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющая условию Гёльдера, то можно найти матрицу-функцию $F(z)$, голоморфную в D^+, непрерывную при $|z| \leqslant 1$ и такую, что $F^{-1}(z)$ существует при любом z $(|z| \leqslant 1)$, и

$$F(t) F^*(t) = A(t) \quad (t \in L),$$

причем $F(z)$ определяется однозначно с точностью до правого постоянного унитарного множителя.

Н. П. Векуа

1168. О конформном отображении бесконечносвязных областей. Штребель (Über die

konforme Abbildung von Gebieten unendlich hohen Zusammenhangs. Strebel Kurt), Comment. math. helv., 1953, 27, № 2, 101—127 (нем.)

Ставится следующая общая задача: охарактеризовать те бесконечносвязные области, на которые распространяется любая теорема существования конформного отображения для конечносвязных областей. С этой целью доказывается следующее предложение: каждая теорема существования конформного отображения для конечносвязных областей справедлива также для счетносвязной области G_z, для которой $d(z) \to 0$, когда z из области G_z стремится к любой граничной компоненте. При этом $d(z)$ есть экстремальное расстояние точки z от этой граничной компоненты. Понятие экстремального расстояния автор определяет следующим образом:

Пусть $\{\gamma\}$ — множество спрямляемых кривых в области G_z и $\rho(z)$ — действительная неотрицательная функция в G_z, для которой интегралы

$$L_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho\,|dz| \text{ и } F_\rho(G) = \iint_G \rho^2\,dx\,dy$$

существуют и $0 < F_\rho(G) < \infty$.

Каждой такой функции $\rho(z)$ ставим в соответствие число

$$\mu(\rho, \{\gamma\}, G) = \frac{L_\rho^2\{\gamma\}}{F_\rho(G)},$$

где

$$L_\rho\{\gamma\} = \inf_\gamma L_\rho(\gamma).$$

Экстремальной длиной $\lambda\{\gamma\}$ множества кривых $\{\gamma\}$ назовем

$$\lambda\{\gamma\} = \sup_\rho \mu(\rho, \{\gamma\}, G),$$

где верхняя грань берется по всем допустимым функциям $\rho(z)$. Экстремальным расстоянием $d(z)$ точки z области от граничной компоненты Γ назовем экстремальную длину

$$d(z) = \lambda\{\gamma\}$$

множества спрямляемых кривых γ, которые лежат в области G и содержат внутри точку z и граничную компоненту Γ, либо отделяют точку z от некоторой кривой Γ', содержащей Γ, и имеют свои концы на Γ.

Доказывается ряд свойств экстремального расстояния $d(z)$, а также ряд предложений, относящихся к конформному отображению областей, связанных с этим понятием. *И. Е. Базилевич*

1169. Исследования по конформному отображению римановых поверхностей. I. Хейнс (Studies in the conformal mapping of Riemann surfaces. I. Heins Maurice), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 4, 322—324 (англ.)

Пусть F и G — римановы поверхности с положительной границей, $\mathfrak{G}_F$ и $\mathfrak{G}_G$ — соответственно их функции Грина, f — прямое конформное отображение F в G (не обязательно однолистное) и $n(p)$ — кратность f в $p \in F$. Согласно неравенству Линделёфа остаточный член u_q в соотношении

$$\mathfrak{G}_F[f(p), q] = \sum_{f(r)=q} n(r)\,\mathfrak{G}_F(p, r) + u_q(p)$$

есть неотрицательная гармоническая функция на F.

По теореме Парро (Parreau M., Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann. Thesis, Paris, 1952) всякая такая функция допускает единственное представление в виде суммы квазиограниченной и сингулярной гармонических функций на F, определяемых следующим образом: неотрицательная гармоническая функция на F называется квазиограниченной (соответственно сингулярной), если ее можно представить в виде предела монотонной неубывающей последовательности ограниченных неотрицательных гармонических функций на F (соответственно, если единственная мажорируемая ею ограниченная неотрицательная гармоническая функция на F есть тождественный нуль). Автор доказывает следующую теорему:

Отображение $(p, q) \to u_q(p)$ полунепрерывно сверху на $F \times G$. Если v_q — квазиограниченная компонента u_q, то $(p, q) \to v_q(p)$ полунепрерывно снизу на $F \times G$. Либо $v_q = 0$ для всех q, либо для всех q $v_q \neq 0$. Множество точек q, в которых $u_q - v_q > 0$, является множеством F_σ емкости нуль.

Далее вводятся и изучаются отображения следующих типов: типа Bl (когда $v_q = 0$ для всех q), типа Bl в $q \in G$ (когда существует относительно компактная жорданова область Ω, $q \in \Omega \subset G$ такая, что $f^{-1}(\Omega)$ непусто и ограничение f компонентой $f^{-1}(\Omega)$ (любой) является отображением типа Bl относительно Ω) и отображения локально типа Bl (когда f типа Bl в каждой точке $q \in G$). При этом F и G необязательно должны иметь положительную границу. В частности, доказывается теорема:

Если G имеет положительную границу и f — отображение типа Bl, то для каждой области $\Omega \subset G$ ограничение f любой компонентой $f^{-1}(\Omega)$ является отображением типа Bl относительно Ω. Если G имеет положительную границу и локально типа Bl, то f оказывается отображением типа Bl.

Л. И. Волковыский

1170. О распространении интегральной формулы Коши на аналитические функции многих комплексных переменных. Мартинелли (Sulle estensioni della formula integrale di Cauchy alle funzioni analitiche du più variabili complesse. Martinelli Enzo), Ann. mat. pura ed appl., 1953, сер. 4, **34**, 277—347 (итал.)

Для функции одного переменного, аналитической в области R_2, в любой точке $O(\zeta) \in R_2$ выполняется равенство

$$2\pi i N f(\zeta) = \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z - \zeta}\,dz, \qquad (1)$$

где Γ_1 — какая-либо замкнутая спрямляемая кривая, удовлетворяющая условиям: $\Gamma_1 \subset R_2 - O$, Γ_1 гомологична нулю в R_2, а через N обозначен порядок точки O относительно Γ_1.

Этот классический результат автор распространяет на функции многих комплексных переменных, устанавливая следующую общую теорему:

Для функции $f(z_1, \ldots, z_n)$, аналитической в области R_{2n}, в любой точке $O(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in R_{2n}$ и

для любого l, $0 \leqslant l < n$, выполняются $\binom{n}{l}$ интегральных формул, соответствующих различным сочетаниям целых чисел $k_1, \ldots, k_l$ $(1 \leqslant k_\lambda \leqslant n)$:

$$(-1)^l \frac{(2\pi i)^n}{l!} N_{k_1 \ldots k_l} f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) =$$

$$= \int_{\Gamma_{n+l}} f(z_1, \ldots, z_n) \Big\{ (\bar{z}_1 - \bar{\zeta}_1) \ldots$$

$$\ldots [k_1 \ldots k_l] \ldots (\bar{z}_n - \bar{\zeta}_n) \sum_{\sum \varepsilon_j = l} \prod_{[k_1 \ldots k_l]_j} \rho_{k_1 \ldots k_l j}^{-2(1+\varepsilon_j)} \times$$

$$\times d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_{k_1}, \ldots, \bar{z}_{k_l}) -$$

$$- \frac{1}{l} \sum_1^l{}_p \sum_{[k_1 \ldots k_l]_\alpha} (\bar{z}_1 - \bar{\zeta}_1) \ldots$$

$$\ldots [k_1 \ldots k_{p-1} \alpha k_{p+1} \ldots k_l] \ldots (\bar{z}_n - \bar{\zeta}_n) \times$$

$$\times \sum_{\sum \varepsilon_j = l} \varepsilon_\alpha \prod_{[k_1 \ldots k_l]_j} \rho_{k_1 \ldots k_l j}^{-2(1+\varepsilon_j)} \times$$

$$\times d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_{k_1}, \ldots, \bar{z}_{k_{p-1}}, \bar{z}_\alpha, \bar{z}_{k_{p+1}}, \ldots, \bar{z}_{k_l}) \Big\},$$

где Γ_{n+l} — $(n+l)$-мерный цикл, удовлетворяющий условиям: $\Gamma_{n+l} \in R_{2n} - T_{2n-2l-2}$, Γ_{n+l} гомологичен нулю в $(R_{2n} - T_{2n-2l-2}) + O$; $T_{2n-2l-2}$ — многообразие, составленное $\binom{n}{l+1}$ аналитическими $(2n - 2l - 2)$-мерными плоскостями, определяемыми уравнениями $z_{\alpha_1} = \zeta_{\alpha_1}, \ldots, z_{\alpha_{l+1}} = \zeta_{\alpha_{l+1}}$ (здесь $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l+1}$ — всевозможные сочетания чисел $1, 2, \ldots, n$); $N_{k_1 \ldots k_l}$ — целые числа, характеризующие расположение цикла относительно многообразия $T_{2n-2l-2}$;

$\rho^2_{k_1 \ldots k_l^j} = \sum_1^l{}_p |z_{k_p} - \zeta_{k_p}|^2 + |z_j - \zeta_j|^2$; символ $d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_{k_1}, \ldots, \bar{z}_{k_l})$ означает внешнее произведение соответствующих дифференциалов; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ — неотрицательные целые числа; обозначение $[k_1 \ldots k_l]$ указывает, что индексы, заключенные в квадратные скобки, должны опускаться (например, $\prod_{[k_1 \ldots k_l]_j} \rho_{k_1 \ldots k_l j}^{-2(1+\varepsilon_j)}$ — это произведение тех из множителей, для которых j отлично от $k_1, \ldots, k_l$).

При $l = n - 1$ формула принимает следующий вид

$$\frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!} Nf(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) =$$

$$= \int_{\Gamma_{2n-1}} f(z_1, \ldots, z_n) \sum_1^n{}_\alpha (-1)^{\alpha - 1} \times$$

$$\times \frac{\bar{z}_\alpha - \bar{\zeta}_\alpha}{\rho^{2n}} d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_1, \ldots [\alpha] \ldots, \bar{z}_n), \qquad (3)$$

где $\rho^2 = \sum_1^n{}_j |z_j - \zeta_j|^2$, а N — порядок точки O относительно гиперцикла Γ_{2n-1}. Формула (3) была получена ранее автором, а также Меем и Бохнером (1940—1941 гг.). При $l = 0$ получается формула, найденная ранее Сегре (1937 г.),

$$(2\pi i)^n Nf(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) =$$

$$= \int_{\Gamma_n} \frac{f(z_1, \ldots, z_n)}{(z_1 - \zeta_1) \ldots (z_n - \zeta_n)} d(z_1, \ldots, z_n).$$

Оба частных случая приводят при $n = 1$ к интегральной формуле Коши. *Б. А. Фукс*

1171. Внешние дифференциальные формы класса нуль и функции многих комплексных переменных. **А р у ф ф о** (Forme differenziali esterne di classe 0 e funzioni di più variabili complesse. A r u f f o G i u l i o), Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. szi. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 3, 381—385 (итал.)

Пусть f — функция комплексных переменных $z^1, \ldots, z^n$, непрерывная в полицилиндрической области C_{2n}. Доказывается, что если эта функция аналитична по отношению к тем переменным z^k, для которых $k \neq \beta_1, \ldots, \beta_q$, и антианалитична по отношению к тем из этих переменных, для которых $k \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ (где $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ и $\beta_1, \ldots, \beta_q$ — две фиксированные группы индексов $1, \ldots, n$, причем при $r \neq s$ $\alpha_r \neq \alpha_s$, $\beta_r \neq \beta_s$ и $1 \leqslant p + q \leqslant 2n - 1$), то для любого $(p+q)$-мерного цикла B_{p+q}, расположенного в G_{2n},

$$\int_{B_{p+q}} f dz^{\alpha_1} \ldots dz^{\alpha_p} d\bar{z}^{\beta_1} \ldots d\bar{z}^{\beta_q} = 0.$$

Эта теорема является обратной по отношению к одной теореме Бохнера (см. РЖМат, 1953, реф. 704). Автор также приводит доказательство этой теоремы Бохнера. *Б. А. Фукс*

1172. Комплексные пространства с особенностями. **Б о х н е р, М а р т и н** (Complex spaces with singularities. B o c h n e r S., M a r t i n W. T.), Ann. Math., 1953, **57**, № 3, 490—516 (англ.)

Сначала следующим образом определяется топологическое пространство U:

Рассматриваются уравнения

$$\psi_\nu(z, \zeta) \equiv \psi_\nu(z_1, \ldots, z_k, \zeta_1, \ldots, \zeta_\nu) = 0$$

$$(\nu = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где ψ_ν — многочлены относительно переменных $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$ с коэффициентами, являющимися аналитическими функциями $z_1, \ldots, z_k$ в некоторой фиксированной области S евклидова пространства E_{2k} этих переменных. Пусть m_ν — степень многочлена ψ_ν относительно ζ_ν (коэффициент в ψ_ν при $\zeta_\nu^{m_\nu}$ берется равным 1).

Предполагается, что для всех точек z области S совокупность решений данной системы уравнений состоит из $m = m_1 \ldots m_n$ систем функций $\{\zeta_1^{(\mu)}(z), \ldots$

..., $\zeta_n^{(\mu)}(z)\}$, $\mu = 1, \ldots, m$ (эти системы не обязательно всюду в S отличаются друг от друга), обладающих следующими свойствами:

1) Значения функций $\zeta_\nu^{(\mu)}(z)$, составляющих подобную систему, в разных точках области S получаются друг из друга непрерывным продолжением.

2) В области S существует такая аналитическая функция $D(z) \not\equiv 0$, что в точках $S - \mathcal{E}$ (здесь $\mathcal{E}$ — совокупность точек S, где $D(z) = 0$) все m систем решений уравнений (1) различны.

3) Все функции $\zeta_\nu^{(\mu)}(z)$ регулярны в точках $S - \mathcal{E}$. В результате аналитического продолжения, осуществляемого в пределах $S - \mathcal{E}$, рассматриваемые m систем решений уравнений (1) переходят друг в друга.

4) Квадрат $\Delta^2(z)$ определителя $\mathrm{Det}\,([\zeta_1^{(\mu)}(z)]^{\lambda_1} \ldots [\zeta_n^{(\mu)}(z)]^{\lambda_k})$, где $\mu = 1, \ldots, m$; $\lambda_1 = 0, 1, \ldots, m_1 - 1; \ldots; \lambda_n = 0, 1, \ldots, m_n - 1$ (индекс μ меняется вдоль столбцов, индексы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — вдоль строк) регулярен в S и отличен от нуля в $S - \mathcal{E}$.

5) Каждому многочлену вида

$$F(z, \zeta) = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1-1} \ldots \sum_{\lambda_n=0}^{m_n-1} P_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}(z)\, \zeta_1^{\lambda_1} \ldots \zeta_n^{\lambda_n}$$

(где $P_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}(z)$ регулярны в S) отвечает другой подобный многочлен $G(z, \zeta)$ с коэффициентами $Q_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}(z)$ (где $Q_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}(z)$ регулярны в S) такой, что для всех $\mu = 1, \ldots, m$

$$F(z, \zeta_1^{(\mu)}(z), \ldots, \zeta_n^{(\mu)}(z))\, G(z, \zeta_1^{(\mu)}(z), \ldots, \zeta_n^{(\mu)}(z)) = \Omega(z) \not\equiv 0.$$

Здесь $\Omega(z)$ — некоторая функция, аналитическая в области S.

Затем в евклидовом пространстве E_{2k+2n} комплексных переменных $z_1, \ldots, z_k, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ берется множество точек (z, ζ), для которых $z \in S$, $\zeta_\nu = \zeta_\nu^{(\mu)}(z)$. Это множество с топологией, заимствованной из пространства E_{2k+2n}, и является топологическим пространством U.

Пусть, далее, через M обозначено множество точек U, соответствующих точкам множества $\mathcal{E}$ области S, через M_Φ — множество точек U, соответствующих тем точкам области S, где $\Phi(z_1, \ldots, z_k) = 0$. При этом аналитическая в S функция Φ всегда выбирается так, что во всех точках множества $\mathcal{E}$ $\Phi = 0$ (таким образом $M \subset M_\Phi$).

Комплексным пространством S_{2k} с особенностями авторы называют топологическое пространство, составляемое или покрываемое системой множеств $\{V_\sigma\}$, каждое из которых является топологическим образом соответствующего топологического пространства U_σ (описанного типа U). Роль области S для всех U_σ играет единичный шар C: $\|z\| < 1$. При этом для каждого пространства U_σ в шаре C назначается своя аналитическая функция Φ_σ, при помощи которой определяется множество M_σ точек U_σ; множество соответствующих точек V_σ обозначается через N_σ. Предполагается, что рассматриваемое топологическое отображение U_σ на V_σ является голоморфным на $U_\sigma - M_\sigma$ (при этом $U_\sigma - M_\sigma$ переходит в $V_\sigma - N_\sigma$).

Функция $F(P) = F(z, \zeta)$ (где P — точка U), представимая в виде

$$\frac{1}{\Phi(z)} \sum_{\lambda_1=0}^{\lambda_1=m_1-1} \ldots \sum_{\lambda_n=0}^{\lambda_n=m_n-1} P_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}(z)\, \zeta_1^{\lambda_1} \ldots \zeta_n^{\lambda_n},$$

называется при $\Phi = \Delta^2(z)$ голоморфной на U, при $\Phi \equiv 1$ — строго голоморфной на U. Функция $F(P)$ (где P — точка S_{2k}) называется голоморфной или строго голоморфной на S_{2k}, если она определена на S_{2k} и является голоморфной или соответственно строго голоморфной на каждом пространстве U_σ. Соответствующий смысл имеет термин «голоморфное отображение».

Исследуются свойства последовательностей подобных функций (в частности, указываются условия, при выполнении которых предельная функция снова оказывается голоморфной или строго голоморфной). Изучается специальный класс подобных функций, для которых исходное уравнение $\psi(z, \zeta) = 0$ ($h = 1$) имеет вид $\zeta^m + B_1(z)\,\zeta^{m-1} + \ldots + B_m(z) = 0$ (где функции $B(z)$ предполагаются регулярными в S). Для этих «в узком смысле алгеброидных» функций доказываются теоремы типа леммы Шварца, теоремы Адамара о трех кругах, принципа максимума и некоторые другие предложения.

Наконец, рассматриваются группы топологических отображений комплексных пространств с особенностями и связанные с подобными группами автоморфные функции. *Б. А. Фукс*

1173. Свойства n-мерных парааналитических функций. Фреше (Propriétés des fonctions paraanalytiques à n dimensions. Fréchet Maurice), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 23, 2191—2193 (франц.)

Продолжая публикацию результатов, касающихся парааналитических функций, автор приводит условия, обобщающие так называемые условия Коши — Римана, и уравнения, обобщающие уравнение Лапласа. Он устанавливает, далее, сходимость парааналитических «векториальных рядов» в окрестности центральной точки и, наконец, сообщает, что в ближайшей публикации будут перечислены «канонические формы» парааналитических функций двух и трех измерений.

Эти результаты в основном были указаны в работе В. Л. Гончарова (Изв. АН СССР, 1932, 1405—1423), где перечисление канонических форм по Штуди было доведено до четвертого измерения включительно. *В. Л. Гончаров*

1174. Канонические формы парааналитических функций в двух и трех измерениях. Фреше (Formes canoniques des fonctions paraanalytiques à deux et à trois dimensions. Fréchet Maurice), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 25, 2364—2366 (франц.)

Указываются четыре формы, к которым при помощи простых операций могут быть приведены все парааналитические функции в двух и трех измерениях (по две формы для $n = 2$ и для $n = 3$). Отмечается, что смысл понятия «простые операции» будет разъяснен в последующей работе автора.

Перечисляемые формы не исчерпывают классификации Штуди (Study E., Göttingen Nachr., 1889, 237—268); поэтому следует предполагать, что простые операции понимаются здесь в более широком смысле, чем у упомянутого автора. В частности, в реферируемой заметке подчеркивается, что нет необходимости называть форму (P), приведенную в более ранней заметке автора (C. r. Acad. sci., 1952, 235, 1585—1587). *В. Л. Гончаров*

1175 **РЕЦ.** **Введение в теорию функций. Дёрри** (Einführung in die Funktionentheorie. Dörrie Heinrich, pp. 560, München, R. Oldenbourg, 1951) [**Рецензия: Фавар** (Favard J.), Bull. sci. math., 1953, 77, mars — avril, 41—42 (франц.)]

1176 **РЕЦ.** **Конформные отображения. Нехари** (Conformal mapping. Nehari Z., pp. 396, New York, McGraw-Hill, 1952) [**Рецензия: Шабат Б.**, Новые книги за рубежом, 1953, № 6, 45—46]

1177 **РЕЦ.** **Словарь конформных отображений. Кобер** (Dictionary of conformal representations. Kober H., S. 208, 447 Diagrammen, Dover Publications, Inc., N. Y., 1952, 3.95 doll.) [**Рецензия: Дёч** (Doetsch G.), Phys. Blätter, 1953, 9, № 3, 138 (нем.)]

1178 **Д.** **О рядах по многочленам Фабера. Суетин П. К.** Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Матем. ин-т им. Стеклова, М., 1953

1179 **Д.** **Некоторые вопросы полноты и базиса в аналитическом пространстве. Рожанская Н. Н.** Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Ростовский гос. ун-т., Харьков, 1953

1180 **Д.** **Некоторые вопросы теории однолистных и типично вещественных функций в круговом кольце. Ли Ен Пир.** Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., ЛГУ, Л., 1953

1181 **Д.** **О некоторых краевых задачах, требующих применения эллиптических функций. Бабакова О. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Харьковский политехн. ин-т, Харьков, 1953

См. также: 1011, 1018 **РЕЦ**, 1035, 1050, 1063 **РЕЦ**, 1146, 1149, 1213, 1230, 1244, 1257

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1182. **Об одном дифференциальном уравнении. Попов** (Sur une équation différentielle. Popov B. S.), Acad. roy. Belgique, Bull. cl. sci., 1953, сер. 5, 39, № 2, 179—182 (франц.)

Доказывается, что уравнение

$$y'' + (ae^x + b)\,y' + (Ae^{2x} + Be^x + C)\,y = 0$$

(a, b, A, B, C — постоянные) решается при помощи квадратур, если существует целое неотрицательное число n, которое удовлетворяет одному из четырех равенств

$$ab - 2B + a = \pm (a^2 - 4A)^{1/2}[2n + 1 \pm (b^2 - 4C)^{1/2}].$$

В качестве частных случаев отсюда получаются результаты Гёртлера, Крега, Моррис-Броуна, Конте (Görtler, Craig, Morris-Brown, Conte) (см. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1950, 2.20а, стр. 532; 2.37б, стр. 544; 2.63 и 2.63а, стр. 550; 2.90, стр. 556).

Многочисленные опечатки затрудняют чтение статьи. *Г. К. Энгелис*

1183. **О решении обыкновенного дифференциального уравнения Лапласа при помощи повторных интегралов. Хёфингер** (Über die Lösung der gewöhnlichen Laplaceschen Differentialgleichung durch mehrfache Integrale. Höfinger E.), Monatsh. Math., 1953, 57, 6—18 (нем.)

Рассматривается уравнение Лапласа

$$[D_1 (d + \rho_1)(d + \rho_2) \ldots (d + \rho_q) +$$
$$+ C_1 x (d + \alpha_1)(d + \alpha_2) \ldots (d + \alpha_p)]\,y = 0,$$

где $d = d/dx$ — символ дифференцирования; D_1, C_1 и $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_q, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ — постоянные, $\alpha_i \neq \alpha_j$, если $i \neq j$. Обозначим через $y = {}_pf_q(x)$ аналитическое решение этого уравнения, а через $y = {}_mg_n(t)$ аналитическое решение уравнения

$$[D_2 (d - \sigma_1)(d - \sigma_2) \ldots (d - \sigma_n) +$$
$$+ (-1)^{m+n-1} C_2 t (d - \beta_1)(d - \beta_2) \ldots (d - \beta_m)]\,y = 0.$$

Доказывается, что интеграл

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} {}_mg_n(t)\,{}_pf_q(x + t)\,dt$$

при надлежащем выборе t_1 и t_2 является аналитическим решением уравнения

$$[D_1 C_2 (d + \rho_1) \ldots (d + \rho_q)(d + \beta_1) \ldots (d + \beta_m) +$$
$$+ D_2 C_1 (d + \alpha_1) \ldots (d + \alpha_p)(d + \sigma_1) \ldots (d + \sigma_n) +$$
$$+ C_1 C_2 x (d + \alpha_1) \ldots (d + \alpha_p)(d + \beta_1) \ldots$$
$$\ldots (d + \beta_m)]\,y = 0.$$

Последовательное применение этой теоремы позволяет получить фундаментальную систему решений уравнений Лапласа в виде повторных интегралов.

Указывается, что полученные решения аналогичны известным решениями Гурса — Похгаммера для гипергеометрического уравнения. *С. А. Гальперн*

1184. **О бесконечно близких решениях интегро-дифференциальных рекуррентных уравнений нормальной формы. Жерме** (Sur les solutions infiniment voisines des équations intégro-différentielles récurrentes de forme normale. Ger-

m a y R. H.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, 22, № 2, 64—76 (франц.)

Рассматривается вопрос о непрерывной зависимости от параметров решений бесконечной системы интегро-дифференциальных уравнений. Устанавливается следующая теорема:

Обозначим через

$$F_1(x; y, z; u_1, \ldots, u_p; \lambda_1, \ldots, \lambda_r), \ldots$$
$$\ldots, F_n(x; y, z; u_1, \ldots, u_p; \lambda_1, \ldots, \lambda_r), \ldots \quad (1)$$

бесконечную совокупность действительных функций, заданных и непрерывных в области

$$\left.\begin{array}{l} x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a, \\ y_0 - (b+c) \leqslant y \leqslant y_0 + (b+c), \\ y_0 - (b+c) \leqslant z \leqslant y_0 + (b+c), \\ -d_1 \leqslant u_1 \leqslant d_1, \ldots, -d_p \leqslant u_p \leqslant d_p, \\ |\lambda_1| \leqslant l_1, \ldots, |\lambda_r| \leqslant l_r, \end{array}\right\} \quad (2)$$

где a, b, c, d, l — положительные фиксированные числа. Эти функции предполагаются ограниченными в совокупности, M — верхняя граница их модулей в области (2). Предполагается также, что F_n удовлетворяют одному и тому же условию Липшица

$$|F_n(x; y, z; u_1, \ldots, u_p; \lambda_1, \ldots, \lambda_r) - F_n(x; y^*, z^*; u_1^*, \ldots, u_p^*; \lambda_1^*, \ldots, \lambda_r^*)| < H_1|y - y^*| + H_2|z - z^*| + K_1|u_1 - u_1^*| + \ldots + K_p|u_p - u_p^*| + L_1|\lambda_1 - \lambda_1^*| + \ldots + L_r|\lambda_r - \lambda_r^*|, \quad (3)$$

когда переменные x, y, z, $u_1, \ldots, u_p$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, y^*, z^*, $u_1^*, \ldots, u_p^*$, $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_r^*$ принадлежат к области изменения (2); H_1, H_2, $K_1, \ldots, K_p$, $L_1, \ldots, L_r$ — фиксированные положительные числа, одни и те же для всех функций F_n.

Рассмотрим p совокупностей действительных функций

$$\left.\begin{array}{l} f_{11}(x, s; u, v; \lambda_1, \ldots, \lambda_r), \ldots \\ \ldots, f_{n1}(x, s; u, v; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r), \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{1p}(x, s; u, v, \lambda_1, \ldots, \lambda_r), \ldots \\ \ldots, f_{np}(x, s; u, v; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r), \ldots \end{array}\right\} \quad (4)$$

заданных и непрерывных в области

$$\begin{array}{l} x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a, \quad x_0 \leqslant s \leqslant x_0 + a, \\ y_0 - (b+c) \leqslant u \leqslant y_0 + (b+c), \\ y_0 - (b+c) \leqslant v \leqslant y_0 + (b+c). \end{array} \quad (5)$$

Функции f_n предполагаются ограниченными в совокупности, m_i означает границу модулей f_{ni}. Предполагается также, что f_{nj} удовлетворяют условиям Липшица

$$|f_{nj}(x, s; u, v; \lambda_1, \ldots, \lambda_r) - f_{nj}(x, s; u^*, v^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_r^*)| < P_{j_1}|u - u^*| + P_{j_2}|v - v^*| + Q_{j_1}|\lambda_1 - \lambda_1^*| + \ldots + Q_{j_r}|\lambda_r - \lambda_r^*|, \quad (j = 1, 2, \ldots, p), \quad (6)$$

P_{j1}, P_{j2}, $Q_{j1}, \ldots, Q_{jr}$ — положительные фиксированные числа, не зависящие от n. Рассмотрим еще бесконечную совокупность функций параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$:

$$\theta_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_r), \ldots, \theta_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_r), \ldots \quad (7)$$

действительных, непрерывных и ограниченных по совокупности в области

$$|\lambda_1| \leqslant l_1, \ldots, |\lambda_r| \leqslant l_r. \quad (8)$$

Предполагается, что эти функции удовлетворяют условию Липшица

$$|\theta_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) - \theta_n(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_r^*)| < T_1|\lambda_1 - \lambda_1^*| + \ldots + T_r|\lambda_r - \lambda_r^*| \quad (9)$$

при любом n. Пусть все эти функции обращаются в нуль при

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0. \quad (10)$$

Рассмотрим интегро-дифференциальные рекуррентные уравнения

$$\frac{dy_n}{dx} = F_n\Big\{x; y_n(x), y_{n+1}(x); \int_{x_0}^{x} f_{n1}[x, s; y_n(s), y_{n+1}(s); 0, \ldots, 0]\, ds, \ldots \int_{x_0}^{x} f_{np}[x, s; y_n(s), y_{n+1}(s); 0, \ldots, 0]\, ds; 0, 0, \ldots, 0\Big\}, \quad (11)$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Обозначим через

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots \quad (12)$$

решения этих уравнений, обращающиеся в y_0 при $x = x_0$. Существование этих решений, их непрерывность по отношению к x и единственность обеспечиваются для значений x, лежащих в интервале $(x_0, x_0 + h)$, где h — наименьшее из чисел

$$a, \frac{b+c}{M}, \frac{d_1}{m_1}, \ldots, \frac{d_p}{m_p}. \quad (13)$$

Рассмотрим эти решения в интервале (x_0, x_1), где $x_1 - x_0$ — наименьшее из чисел

$$a, \frac{b}{M}, \frac{d_1}{m_1}, \ldots, \frac{d_p}{m_p}, \quad (14)$$

и рассмотрим интегро-дифференциальные рекуррентные уравнения

$$\frac{dY_n}{dx} = F_n\Big\{x; Y_n(x; \lambda_1, \ldots, \lambda_r), Y_{n+1}(x; \lambda_1, \ldots, \lambda_r); \int_{x_0}^{x} f_{n1}[x, s; Y_n(s; \lambda_1, \ldots, \lambda_r), Y_{n+1}(s; \lambda_1, \ldots, \lambda_r); \lambda_1, \ldots, \lambda_r]\, ds, \ldots \int_{x_0}^{x} f_{np}[x, s; Y_n(s; \lambda_1, \ldots, \lambda_r), Y_{n+1}(s; \lambda_1, \ldots, \lambda_r); \lambda_1, \ldots, \lambda_r]\, ds; \lambda_1, \ldots, \lambda_r\Big\}. \quad (15)$$

Для значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, достаточно малых по модулю, уравнения (15) допускают в интервале (x_0, x_1) интегралы

$$\Phi_1(x; \lambda_1, \ldots, \lambda_r), \ldots, \Phi_n(x; \lambda_1, \ldots, \lambda_r), \ldots; \quad (16)$$

непрерывные по x в (x_0, x_1) и по $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ для рассматриваемых значений этих параметров. Они принимают при x_0 значения

$$\theta_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_r), \ldots, \theta_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_r), \ldots \quad (17)$$

и сводятся к решениям (12) при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$.

В этом случае решения (16) уравнений (15) автор называет бесконечно близкими к решениям (12) уравнений (11). Существование решений (12) доказано в более ранней работе автора (Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1951, **20**, 238—248). *Н. П. Жидков*

1185. О бушующих системах. Фогель (Sur les systèmes déferlants. Vogel Théodore), Bull. Soc. math. France, 1953, **81**, № 1, 63—75 (франц.)

Понятие бушующей (деферлянтной) системы было введено автором ранее (C. r. Acad. sci., 1950, **231**, 207; Ann. télécommun. 1951, **6**, 182). В реферируемой работе этим термином, по существу, обозначается пара динамических систем $\dot{x} = X_1(x, y)$; $\dot{y} = Y_1(x, y)$ и $\dot{x} = X_2(x, y)$; $\dot{y} = Y_2(x, y)$, заданных на замкнутой области D с границей T; при построении траектории пользуются одной из этих систем до тех пор, пока эта траектория не доходит до T, а как только это произойдет, то система сменяется до следующей встречи с T и т. д. Рассматриваются только такие траектории, для которых этот процесс можно продолжить неограниченно, причем построение однозначно; впрочем, детально вопрос о возможности и единственности неограниченного продолжения этого процесса не обсуждается.

Основной целью работы является выяснение условий наличия периодического решения заданной бушующей системы, а также получение ответа на вопрос, будет ли найденное периодическое решение устойчивым (в обычном смысле). Для упрощения вторая система считается имеющей стандартный вид $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = x$, а первая система берется в четырех вариантах: 1) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = 0$ (регулярный случай), 2) $\dot{x} = x$, $\dot{y} = y$, 3) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x$, 4) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ (сингулярные случаи).

Все приводимые критерии, которые связываются с видом T (T считается кусочно-гладкой кривой), весьма просты и непосредственно следуют из определений; ни один сколько-нибудь неочевидный факт не формулируется. При изложении не преследуется полнота рассмотрения всех возможных случаев и в ряде случаев сформулированы не все необходимые предположения. Изложение в целом имеет характер описания; нет ни одного выделенного четко сформулированного утверждения, снабженного доказательством. Опечатка: на стр. 72, строка 5 снизу, последняя дробь должна иметь вид $d\eta / -\xi$. *А. Д. Мышкис*

1186. О возможности захвата в задаче трех тел. Ситников К. А., Мат. сб., 1953, **32** (74): 3, 693—705

Если в задаче трех тел ($H > 0$) при $t \to -\infty$ все взаимные расстояния неограниченно возрастают, а при $t \to +\infty$ два взаимных расстояния неограниченно возрастают, а третье ограничено, то говорят, что при $t \to +\infty$ имеет место явление захвата.

До последнего времени в астрономической литературе господствовало необоснованное утверждение Шази о невозможности захвата. В 1947 г. О. Ю. Шмидтом был построен численный пример захвата. Но поскольку О. Ю. Шмидт пользовался численным интегрированием, погрешности которого не поддаются строгому учету, его пример не мог служить строгим доказательством возможности захвата.

Автор реферируемой работы, не прибегая к численному интегрированию, строит пример плоской системы трех тел, зависящей от трех параметров R, c и n, в которой осуществляется захват. Его результат состоит в следующем: если при $t = 0$ в инерциальной системе координат тела (1), (2) и (3) имеют, соответственно, координаты $\left(-\frac{c}{n}, 0\right)$, $\left(\frac{c}{n}, 0\right)$, $(-2R, 0)$ и скорости $(0, n)$, $(0, -n)$, $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$, где

$$v_{1x} = \sqrt{n^2 - \frac{n}{2c}}\cos\varphi, \quad v_{1y} = \sqrt{n^2 - \frac{n}{2c}}\sin\varphi,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = 4c\sqrt{n^2 - \frac{n}{2c}}, \quad v_{2x} = 0, \quad v_{2y} = \frac{1}{\sqrt{R}},$$

то при достаточно большом n и $R > 1000c^2$ будет иметь место захват.

Доказательство состоит из двух этапов. Сначала устанавливается, что при $|t| \leqslant \frac{4R}{n}$ данная система сколь угодно мало отличается от некоторой вспомогательной.

Затем автор показывает, что при $t = \frac{4R}{n}$ и при $t = -\frac{4R}{n}$ выполняются критерии гиперболо-эллиптического и гиперболического движений, принадлежащие, соответственно, автору и Г. Ф. Хильми.

Следует отметить, что при доказательстве теоремы 2 автор допускает логическую неточность, которая легко устраняется, если в формулировке леммы 2 вместо предположения: s_{12} и s_{13} больше, чем $\frac{s_0 + v_0 t}{2}$, предположить, что s_{12} и s_{13} больше или равны $\frac{s_0 + v_0 t}{2}$. *Г. А. Мерман*

1187. Основная алгебра сильно фокусирующих систем. Белл (Basic algebra of the strong focussing system. Bell J. S.), Atomic Energy Res. Establ. Repts, 1953, T/R 1114, 1—10 (англ.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}\left\{M\frac{dq}{dt}\right\} = k(t)\,q,$$

где q — смещение частицы от некоторой оси, а M — ее релятивистская масса. Полагая $p = M = dp/dt$, автор сводит это уравнение к системе двух уравнений первого порядка, которую исследует сначала в предположении, что $M = \text{const}$, а $k(t)$ — периодическая функция. Предполагается дополнительно, что матрица второго порядка (α_{jk}), пре-

образующая переменные p, q при сдвиге на период, имеет комплексные корни, по модулю равные единице (что сводится к условию $|\alpha_{11}+\alpha_{22}|<2$).

Показывается, что в этом случае форма $U=\alpha_{12}p^2+(\alpha_{11}-\alpha_{22})\,pq-\alpha_{21}\,q^2$ — остается постоянной для каждой фиксированной частицы и потому играет роль, аналогичную энергии в случае простого гармонического движения. Из этих результатов вытекает, что максимальное возможное значение квадрата смещения q^2 есть

$$\frac{\max|\alpha_{12}|}{\sin^2\theta}\,|U|.$$

Если рассматриваемая ось претерпевает смещения и повороты случайного характера, то предыдущие результаты дают возможность определить среднее квадратичное значение максимального отклонения от оси.

Предыдущие результаты применяются к статистическому исследованию систем, уже не являющихся периодическими, но коэффициенты которых медленно изменяются.

Указывается, что изложенные методы были использованы при исследовании «сильной фокусировки» в линейных ускорителях.

М. А. Наймарк

1188. Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка. Шиманов С. Н., Прикл. математика и механика, 1953, **17**, № 3, 369—372

Рассматривается уравнение

$$\frac{d^3x}{dt^3}+f\left(x,\frac{dx}{dt}\right)\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+cx=0,$$

где b и c — постоянные, а функция $f(x,\frac{dx}{dt})$ непрерывна и имеет непрерывную производную по x при всех значениях аргументов.

Показывается, что если выполнены условия Рауса — Гурвица

$$b>0,\quad bf\left(x,\frac{dx}{dt}\right)>c>0$$

и, кроме того, $\frac{dx}{dt}\frac{\partial f}{\partial x}\leqslant 0$, то решение $x=0$ рассматриваемого уравнения асимптотически устойчиво при любых начальных условиях. В частности, если $f(x,\frac{dx}{dt})$ не содержит явно x, то для указанной устойчивости достаточно выполнения одних условий Рауса — Гурвица.

И. Г. Малкин

1189. Об устойчивости при любых начальных возмущениях решений одной нелинейной системы трех уравнений. Красовский Н. Н., Прикл. математика и механика, 1953, **17**, № 3, 339—350

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=f_1(x)+a_{12}y+a_{13}z\\ \frac{dy}{dt}&=f_2(x)+a_{22}y+a_{23}z\\ \frac{dz}{dt}&=f_3(x)+a_{32}y+a_{33}z,\end{aligned}\qquad(1)$$

где a_{ik} — постоянные, $f_i(0)=0$, $f_i(x)$ непрерывны при любом x и таковы, что выполнены условия единственности решения в точке $x=y=z=0$. Предполагается далее, что хотя бы одна из величин

$$\Delta_{11}=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad \Delta_{21}=-\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad \Delta_{31}=\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix},$$

отлична от нуля (для определенности считаем далее $\Delta_{21}\neq 0$). Для рассматриваемой системы строится «характеристическое уравнение»:

$$|a_{ik}-\delta_{ik}\lambda|=\lambda^3+a(x)\lambda^2+b(x)\lambda+c(x)=0,\qquad(2)$$

где $a_{i1}=f_i(x)/x$.

Показывается, что если $a_{12}\Delta_{31}-a_{13}\Delta_{21}=0$, то для асимптотической устойчивости невозмущенного движения $x=y=z=0$ системы (1) при любых начальных возмущениях достаточно, чтобы при всех $x\neq 0$ коэффициенты уравнения (2) удовлетворяли обычным условиям Рауса — Гурвица $a>0$, $c>0$, $ab-c>0$. При этом должны быть наложены некоторые ограничения (показывается, что эти ограничения необходимы) на поведение функций $f_i(x)$ в бесконечности.

Для случая $a_{12}\Delta_{31}-a_{13}\Delta_{21}\neq 0$ также устанавливается критерий асимптотической устойчивости невозмущенного движения при любых начальных возмущениях, выражающийся в виде некоторого неравенства, которому должны удовлетворять коэффициенты уравнения (2). Кроме того, предполагается, что

$$\int_0^{+\infty}c(x)\,x\,dx=\infty.$$

Если функции $f_i(x)$ линейны, то указанный критерий эквивалентен неравенствам Рауса — Гурвица.

Полученные результаты применяются к уравнению

$$\frac{d^3x}{dt^3}+a\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+f(x)=0.$$

И. Г. Малкин

1190. Об устойчивости одной механической системы с одной степенью свободы. Старжинский В. М., Прикл. математика и механика, 1953, **17**, № 1, 117—122

Рассматривается уравнение

$$y''+ay'+p(x)\,y=0,\qquad(1)$$

где $p(x+\omega)=p(x)$, $p(x)>0$, $p(x)\not\equiv 0$ и a — положительная постоянная. Показывается, что метод А. М. Ляпунова для установления ограниченности решения уравнения $y'+p(x)\,y=0$ прилагается и к исследованию уравнения (1). В качестве примера рассмотрено уравнение

$$y''+ay'+C(1+\lambda\cos x)\,y=0,$$

где $a=\frac{\omega}{2\pi}\alpha$, $C=\frac{\omega^2}{4\pi^2}$.

В. В. Немыцкий

1191. Определение произвола в выборе матрицы, приводящей систему линейных дифференциальных уравнений к системе с постоянными коэффициентами. Атрашенок П. В., Вестн. ЛГУ, сер. мат., физ. и хим., 1953, № 2, 17—29

Приводимая система линейных дифференциальных уравнений $\frac{dX}{dt} = XP(t)$, где $P(t)$ — матрица коэффициентов, X — интегральная матрица и $t_0 \leqslant t < +\infty$, при помощи преобразования Ляпунова $X = YZ(t)$ (предполагается существование Z^{-1} и $\frac{dZ}{dt}$, ограниченных вместе с $Z(t)$ при $t \geqslant t_0$) может быть переведена в систему $\frac{dY}{dt} = YB$ с постоянной матрицей коэффициентов B. Согласно теореме Еругина матрицу B всегда можно выбрать жордановой с вещественными характеристическими числами. Произвол в выборе преобразования Ляпунова определится, если будут найдены все преобразования Ляпунова $Y = Y_1 Z(t)$, не изменяющие матрицы коэффициентов $\frac{dY_1}{dt} = Y_1 B$. Соответствующие матрицы Z охватываются формулой

$$Z = e^{-Bt} C e^{Bt}. \qquad (*)$$

где C — постоянная матрица.

В реферируемой работе разыскивается общий вид матрицы C, при которой матрица (*) ограничена при $t \geqslant t_0$ вместе со своей обратной и производной матрицей. Основной результат может быть сформулирован так:

Пусть матрица B имеет квазидиагональную форму $B = \{J_{\rho_1}, J_{\rho_2}, \ldots, J_{\rho_\nu}\}$, где J_{ρ_k} — жорданова матрица, у которой все характеристические числа равны вещественному числу ρ_k $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$, и пусть $\rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_\nu$.

Тогда искомые матрицы C выделяются следующими условиями:

В соответствующем разбиении матрицы $C = (C_{ik})$, $1 \leqslant i, k \leqslant \nu$, на блоки C_{ik}:

1) $C_{ik} = 0$ при $i < k$; 2) C_{ik} произвольно при $i > k$; 3) C_{ii} — произвольная неособенная ($|C_{ii}| \neq 0$) перестановочная с J_{ρ_i} матрица: $C_{ii} J_{\rho_i} = J_{\rho_i} C_{ii}$.

Ф. Р. Гантмахер

1192. Гашение наибольшей субгармонической составляющей колебаний нелинейной системы. Людеке, Бэн (The extinction of predominantly subharmonic oscillations in nonlinear systems. Ludeke Carl A., Pong William), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 1, 96—97 (англ.)

Рассматривается нелинейная колебательная система, описываемая уравнением с постоянными коэффициентами

$$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + \alpha\theta + \beta\theta^3 = H\cos\omega t - G\sin\omega t.$$

Приводится ранее выведенное условие (Ludeke Carl A., J. Appl. Phys. (N. Y.), 1951, 22)

$$\omega^2 = 9(\alpha + 0{,}92\,\beta A^2),$$

при котором в субгармонической части решения уравнения (1) преобладает субгармоника порядка $^1/_3$ с амплитудой A.

Опираясь на известные в литературе теоретические исследования (Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, Изд-во иностр. лит-ры, 1952), авторы провели ряд экспериментов на механической системе с электромагнитным демпфированием по выяснению условий возникновения или гашения упомянутой субгармоники, в основном подтвердивших результаты теории.

А. Н. Обморшев

1193. О квадратичных критериях качества переходных процессов регулирования, описываемых линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами. Крыжановский (Про квадратичні критерії якості перехідних процесів регулювання, що описуються лінійними різницевими рівняннями із сталими коефіцієнтами. Крижановський О. М.), Доповіді АН УРСР, 1953, № 3, 196—202 (укр.)

Пусть через u_m обозначено решение конечно-разностного уравнения с постоянными коэффициентами:

$$u_{m+n} + a_1 u_{m+n-1} + a_2 u_{m+n-2} + \ldots + a_n u_m = 0 \quad (a_n \neq 0),$$

определяемое начальными значениями

$$u_0, u_1, \ldots, u_{n-1},$$

и ряды

$$I = \sum_{m=0}^{\infty} u_m^2, \quad \sum_{m=0}^{\infty} u_m u_{m+k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

сходятся.

Указывается на связь между суммой I и определителями D и D_1 $(n+1)$-го порядка (из которых D зависит только от коэффициентов разностного уравнения a_ν, а D_1 — как от этих коэффициентов, так и от начальных значений) вида

$$I = \frac{D_1}{D}.$$

При некоторых специальных значениях a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ последнее соотношение теряет смысл. Это имеет место, например, при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$.

Ш. Е. Микеладзе

1194. О канонических преобразованиях уравнений теории автоматического регулирования. Троицкий В. А., Прикл. математика и механика, 1953, **17**, № 1, 49—60

Рассматривается система уравнений

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m} h_{\beta k} f_\beta(x_1, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

$$(k = 1, \ldots, n).$$

В предположении, что корни характеристического уравнения $D(\lambda) = |\lambda I - b| = 0$ простые и действительные, выводятся формулы преобразования системы (1) к виду

$$\dot{z}_\rho = \lambda_\rho z_\rho + \sum_{s=1}^{m} a_{s\rho} F_s(z_1, \ldots, z_n). \qquad (2)$$

Коэффициенты преобразования, приводящего (1) к виду (2), и полученные коэффициенты $a_{s\rho}$ выражаются явным образом через алгебраические дополнения элементов матрицы $\|\lambda I - b\|$. Полученные ре-

зультаты применяются к выводу соответствующих формул в том случае, когда преобразуемая система имеет вид

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}x_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m} h_{\beta k}f_\beta(\sigma_\beta), \quad k=1,\ldots,n,$$

$$\sigma_\beta = \sum_{k=1}^{n} J_{\beta k}x_k, \quad \beta=1,\ldots,m.$$

Такие системы встречаются при изучении систем автоматического регулирования. Частный случай этой задачи был рассмотрен А. И. Лурье (см. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951).

В. В. Немыцкий

1195. О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях. Гринберг Г. А., Прикл. математика и механика, 1953, **17**, № 2, 211—228

В связи с рассмотрением вопросов, упомянутых в заглавии, П. Ф. Папковичем (Строительная механика корабля, ч. II, Судиздат, 1941) была поставлена задача об одновременном разложении двух независимых друг от друга вещественных функций $f_1(y)$ и $f_2(y)$, заданных в интервале от $y=-{}^1/_2 b$ до $y=+{}^1/_2 b$, в ряды вида

$$f_1(y)=\sum a_k L_1[F_k(y)], \qquad f_2(y)=\sum a_k L_2[F_k(y)], \tag{1}$$

где a_k — комплексные постоянные, одинаковые в обоих разложениях;

L_1, L_2 — линейные операторы с постоянными коэффициентами;

$F_k(y)$ — функции Папковича, удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$F_k^{\mathrm{IV}}(y)+2s_k^2F_k''(y)+s_k^4F_k(y)=0 \tag{2}$$

и обращающиеся вместе с первой производной в нуль на концах интервала;

s_k — корни некоторого, полученного П. Ф. Папковичем, трансцендентного уравнения.

Возможность подобных совокупных разложений доказывается сначала для

$$L_1[F_k(y)]=F_k(y), \quad L_2[F_k(y)]=s_k^2F_k(y). \tag{3}$$

В результате определения сумм рядов показывается, что оба разложения справедливы, по крайней мере, при некоторых довольно общих ограничениях, накладываемых на функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$.

Дается новая форма коэффициентов в разложениях

$$a_k=-\frac{1}{2}\left\{\int_{-{}^1/_2 b}^{+{}^1/_2 b}(2f_1(x)F_k''(x)+[s_k^2f_1(x)+f_2(x)]F_k(x))\,dx\right\}:\int_{-{}^1/_2 b}^{+{}^1/_2 b}([F_k'(x)]^2-s_k^2[F_k(x)]^2]\,dx,$$

при которой можно освободиться от ограничений, накладывавшихся на значение функции $f_1(y)$ в конце и на значение ее производной в начале интервала.

Указывается на возможность проведения доказательства для иных случаев, чем (3), и, в частности, для

$$L_1[F_k(x)]=F_k(y), \quad L_2[F_k(y)]=s_kF_k(y).$$

Методом П. Ф. Папковича получено решение бигармонических задач для области, имеющей вид кругового прямоугольника, ограниченного дугами двух концентрических окружностей и двумя отрезками радиусов, исходящих из общего центра этих окружностей; на радиальных сторонах плита считается жестко заделанной.

В заключение указывается на возможность обобщения для других граничных условий по радиальным сторонам.

Б. Г. Коренев

1196. Теорема о функции Грина, соответствующей задаче о собственных значениях в проблеме линейной турбулентности. Добавление к моей работе: «Исследование задачи о собственных значениях $\frac{d}{dx}\left(f(x)\frac{dy}{dx}\right)+\lambda g(x)y=0$; $\int_a^b A(x)y\,dx=\int_a^b B(x)y\,dx=0$» **(напечатанной в Math. Nachr., 1951, 6, 229—260). Томас** (Ein Satz über die zur Eigenwertaufgabe des linearen Turbulenzproblems gehörige Greensche Funktion. Nachtrag zu meiner Arbeit: «Untersuchungen über das Eigenwertproblem

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\frac{dy}{dx}\right)+\lambda g(x)y=0;\int_a^b A(x)y\,dx=\int_a^b B(x)y\,dx=0»$$

(Math. Nachr., 1951, 6, 229—260). Thomas Johannes), Math. Nachr., 1953, **9**, № 6, 379—383 (нем.)

Рассматривается краевая задача

$$\begin{cases}\dfrac{d^2z}{dx^2}=[\lambda(\alpha x+\beta)+\alpha^2]z & (1)\\ \displaystyle\int_0^1 e^{-\alpha x}z\,dx=\int_0^1 e^{\alpha x}z\,dx=0, & (2)\end{cases}$$

где $\alpha\neq 0$ и $\beta\neq 0$ вещественны. Относительно функции Грина $G(x,s)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\alpha^2z$$

и условиям (2), имеет место следующая теорема:

Функция $G(x,x)$, определенная на сегменте $0\leqslant x\leqslant 1$, удовлетворяет уравнению $G(x,x)=G(1-x,1-x)$, условиям

$$G(0,0)=\left(\frac{dG}{dx}\right)_{x=0}=\left(\frac{dG}{dx}\right)_{x={}^1/_2}$$

и монотонна при $0\leqslant x\leqslant {}^1/_2$. Кроме того, в интервале $0<x<{}^1/_2$ она имеет одну и притом единственную точку перегиба.

Для доказательства применяется общая формула, полученная автором в его основной работе; при помощи этой формулы вычисляется функция $G(x, x)$, которая исследуется элементарными методами анализа. *П. Д. Калафати*

1197. Об особенностях в сетях кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Хартман, Винтнер (On the singularities in nets of curves defined by differential equations. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 2, 277—297 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$adx^2 + 2bdxdy + cdy^2 = 0, \qquad (1)$$

где a, b, c — функции от x и y, непрерывные в окрестности точки $(x, y) = (0, 0)$ и дифференцируемые в точке $(0, 0)$. Предполагается, что при $x^2 + y^2 > 0$ выражение $ac - b^2 < 0$ и что в точке $(0, 0)$ все три коэффициента обращаются в нуль и имеют вид

$$a = \alpha_1 x + \beta_1 y + f_1, \quad b = \alpha_2 x + \beta_2 y + f_2,$$
$$c = \alpha_3 x + \beta_3 y + f_3, \quad f_k = o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right). \qquad (2)$$

Под интегральной кривой уравнения (1) понимается множество точек, представимое уравнениями $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, где $x(\tau)$ и $y(\tau)$ — непрерывно дифференцируемые функции τ, удовлетворяющие уравнению (1) на некотором интервале изменения τ, на котором ни (x, y), ни (x', y') не обращаются в нулевой вектор $(0, 0)$. Интегральной кривой, достигающей начала, называется интегральная кривая, определенная на интервале $0 \leqslant \tau < \tau_0 \leqslant \infty$, и такая, что $(x(\tau), y(\tau)) \to (0, 0)$ при $\tau \to \tau_0$. Дифференциальное уравнение (1) эквивалентно двум обыкновенным дифференциальным уравнениям. Обозначим семейства интегральных кривых этих уравнений через S_1 и S_2.

Пусть r, θ — полярные координаты точки x, y, связанные с x, y обычными соотношениями. Пусть, далее,

$$L_k(\theta) = \alpha_k \cos\theta + \beta_k \sin\theta, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$Q(\theta) = L_2^2(\theta) - L_1(\theta) L_3(\theta),$$

$M(\theta) = L_1(\theta)\cos^2\theta + 2L_2(\theta)\cos\theta\sin\theta + L_3(\theta)\sin^2\theta$ (здесь α_k, β_k взяты из выражений (2)). В этих обозначениях устанавливается теорема (*):

Если в окрестности точки $(0, 0)$ (в оригинале ошибочно напечатано (x, y)) функции a, b, c удовлетворяют вышеперечисленным условиям и а) L_1, L_2, L_3 не обращаются в нуль одновременно, б) $Q(\theta) \not\equiv 0$, в) $M(\theta) \not\equiv 0$, то для семейств S_1 и S_2 выполнены следующие свойства:

1. Каждое из семейств S_1 и S_2 имеет по крайней мере по одной интегральной кривой, достигающей начала.

2. Каждой интегральной кривой, достигающей начала, соответствует угол θ_0 такой, что $\theta \to \theta_0$, где $\theta = \operatorname{arctg} y/x$, и $\varphi \to \theta_0$, где $\varphi = \operatorname{arctg} dy/dx$, при $(x, y) \to (0, 0)$.

Особо изучается случай, когда нарушено условие одновременного необращения $L_k(\theta)$ в нуль. Результаты в значительной части распространяются и на этот случай, но при дополнительном требовании, чтобы a, b, c принадлежали классу C^1. Теорема (*) прилагается к изучению линий кривизны в окрестности омбилической точки поверхности $z = z(x, y)$, где $z(x, y)$ класса C^3, при условии

$$\{z_{xxx}z_{xyy} - z_{xxy}z_{yyy} - (z_{xyy} + z_{xxy})(z_{xyy} - z_{xxy})\}_{x=0,\ y=0} \neq 0,$$

и к изучению асимптотических линий в окрестности точки уплощения. *В. В. Рыжков*

1198 РЖ. Начальный курс высшей математики. Том V. Дифференциальные уравнения и их приложения. Кине (Cours élémentaire de mathématiques supérieures. Tome V: Les équations différentielles et leurs applications. Quinet J.) [Рецензия: Bull. scient. Assoc. ingrs Montefiore, 1953, 66, № 3, 265—266 (франц.)]

1199 Д. О периодических и почти периодических решениях некоторых дифференциальных уравнений. Борухов Л. Е. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Саратовский гос. ун-т, Саратов, 1953

1200 Д. Вопросы устойчивости системы двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Якубович В. А. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., ЛГУ, Л., 1953

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

1201. Функционально-инвариантные решения уравнений гиперболо-параболического типа с тремя независимыми переменными. Смирнов М. М., Прикл. математика и механика, 1953, **17**, № 4, 509—512

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$L(u) = a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} - \beta\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad (1)$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2 и β — функции от x, y и t, причем $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$.

Функция u называется функционально-инвариантным (ф.-и.) решением уравнения (1), если $F(u)$ есть также решение уравнения (1) при произвольной функции F.

В статье даны необходимые и достаточные условия для существования ф.-и. решений уравнения (1).

В частности, если

$$\sqrt{a_{22}}\frac{\partial a_{11}}{\partial t} + a_{12}\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial a_{11}}{\partial y} + 2\beta a_{11}\sqrt{a_{22}} - 2b_1 a_{12} = 0;$$
$$\sqrt{a_{11}}\frac{\partial a_{22}}{\partial t} + a_{11}\frac{\partial a_{22}}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial a_{12}}{\partial y} + 2\beta a_{22}\sqrt{a_{11}} - 2b_2 a_{12} = 0,$$

или

$$\sqrt{a_{22}}\frac{\partial a_{11}}{\partial t} - a_{12}\frac{\partial a_{11}}{\partial x} - a_{22}\frac{\partial a_{11}}{\partial y} + 2\beta a_{11}\sqrt{a_{22}} + 2b_1 a_{12} = 0,$$
$$\sqrt{a_{11}}\frac{\partial a_{22}}{\partial t} - a_{11}\frac{\partial a_{22}}{\partial x} - a_{12}\frac{\partial a_{22}}{\partial y} + 2\beta a_{22}\sqrt{a_{11}} + 2b_2 a_{12} = 0,$$

то всякое решение уравнения характеристик

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - a_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 2a_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - a_{22}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$$

есть ф.-п. решение уравнения (1). Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} — положительные постоянные, имеет два ф.-п. решения, что позволяет решить задачу Коши в замкнутом виде. Это исследование связано с работой Н. П. Еругина (Уч. зап. ЛГУ, сер. мат. н., 1949, № 16). *Н. П. Еругин*

1202. Изолированные особые точки и линии решений линейных уравнений с частными производными. Чудов Л. А., Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 4, 507—508

Пусть уравнение с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i+j+k=n} a_{ijk}\frac{\partial^n u}{\partial x^i\,\partial y^j\,\partial z^k} = 0$$

в области $0 < r \equiv \sqrt{x^2+y^2+z^2} < r_0$ обладает $n+3$ раза непрерывно дифференцируемым решением, причем абсолютные величины всех производных $(n-1)$-го порядка от этого решения менее Ar^{-p} (A и p — некоторые константы) и по крайней мере одна из производных n-го порядка имеет при $r=0$ неустранимый разрыв. Пусть далее форма

$$f \equiv \sum_{i+j+k=n} a_{ijk}\alpha^i\beta^j\gamma^k$$

удовлетворяет условию невырожденности, т. е. система уравнений

$$f = \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial \beta} = \frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0$$

не имеет нетривиальных комплексных решений. Утверждается, что тогда данное дифференциальное уравнение является эллиптическим.

Имеется пример, показывающий, что в формулировке этой теоремы $n+3$ не может быть заменено на n. При доказательстве теоремы (оно в данной статье не приведено) использованы результаты Цейлона (Zeilon N., Arkiv math. astr. fysik, 1913, **9**, № 18). Приведена схема применения этой теоремы к доказательству другой приведенной ниже теоремы, которая определяет возможные скорости распространения изолированных точечных разрывов в пространстве (x, y, z), для решения уравнения с переменными непрерывными коэффициентами

$$\sum_{0\leqslant i+j+k+l\leqslant n} A_{ijkl}\frac{\partial^{i+j+k+l}u}{\partial x^i\partial y^j\partial z^k\partial t^l} = F(x, y, z, t). \quad (*)$$

Если это решение $u(x, y, z, t)$ имеет некоторый отрезок оси t изолированной особой линией и если для некоторого $N>0$ функция $\varepsilon^N u(\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon z, t)$ при $\varepsilon \to 0$, $r>0$ вместе с производными до порядка n включительно сходится к n раз гладкой при $r>0$ функции $v(x, y, z, t)$, отличной от тождественного нуля, то такая линейная особенность называется приводимой к однородной; в общем случае изолированная линейная особенность называется приводимой к однородной, если после совершения достаточно гладкого преобразования пространства (x, y, z, t) мы приходим к уже разобранному случаю.

Теорема утверждает, что направление, характеризуемое вектором (x, y, z, t) может быть в точке $(0, 0, 0, 0)$ носителем изолированной линейной особенности, приводимой к однородной, для решения невырожденного уравнения (*) [возможно, имеется в виду невырожденность формы $\sum_{i+j+k=n} A_{ijk0}$ $(0, 0, 0, 0)\,\alpha^i\beta^j\gamma^k$. — *Прим. реф.*.] только в том случае, если плоскость $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0$ в вещественном пространстве $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ либо не пересекает конуса

$$\sum_{i+j+k+l=n} A_{ijkl}(0, 0, 0, 0)\,\alpha^i\beta^j\gamma^k\delta^l = 0$$

в точках, отличных от начала координат, либо же касается этого конуса. Приведены некоторые частные случаи этой общей теоремы. *А. Д. Мышкис*

1203. Интегрирование линейных вполне интегрируемых систем в полных дифференциалах с двумя независимыми переменными в заданной многосвязной области. Биринделли (Integrazione dei sistemi lineari ai differenziali totali illimitatamente integrabili in due variabili indipendenti in un prescritto campo più volte connesso. Birindelli Carlo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 3, 386—390 (итал.)

Рассматривается система уравнений в полных дифференциалах

$$dx_s = \sum_{j=1}^{2}\left[g_s^{(j)}(t_1, t_2) + \sum_{k=1}^{p} x_k\varphi_s^{(j,k)}(t_1, t_2)\right]dt_j \ (s = 1, \ldots, p), \quad (1)$$

где

$$g_s^{(j)},\ \varphi_s^{(j,k)},\ \frac{\partial g_s^{(1)}}{dt_2},\ \frac{\partial g_s^{(2)}}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial \varphi_s^{(1,k)}}{\partial t_2},\ \frac{\partial \varphi_s^{(2,k)}}{\partial t_1}\ (j=1, 2;\ k, s = 1, \ldots, p)$$

непрерывны в области T плоскости (t_1, t_2), причем выполнены условия полной интегрируемости

$$\frac{\partial g_s^{(1)}}{\partial t_2} - \frac{\partial g_s^{(2)}}{\partial t_1} + \sum_{k=1}^{p}(\varphi_s^{(1,k)}g_k^{(2)} - \varphi_s^{(2,k)}g_k^{(1)}) \equiv 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_s^{(1,l)}}{\partial t_2} - \frac{\partial \varphi_s^{(2,l)}}{\partial t_1} + \sum_{k=1}^{p}(\varphi_s^{(1,k)}\varphi_k^{(2,l)} - \varphi_s^{(2,k)}\varphi_k^{(1,l)}) \equiv 0 \ (s, l = 1, \ldots, p).$$

Автор ранее доказал, что если T односвязна, то начальное условие

$$x_s(t_1^0, t_2^0) = x_s^0 \ (s = 1, \ldots, p) \quad (2)$$

(где $t^0 = (t_1^0, t_2^0) \in T$) определяет решение системы (1) и притом единственное. Область T предполагается в дальнейшем $(\nu+1)$-связной $(\nu \geqslant 1)$. При помощи проведения ν прямолинейных попарно не пересекающихся разрезов T превращается в односвязную область T^* (при этом надо заботиться, чтобы точка $t^{(0)}$ не попала ни на один из этих разрезов,

что в работе не оговорено); на каждом из этих разрезов выбирается точка $t^{(i)}=(t_1^{(i)}, t_2^{(i)})(i=1, \ldots, \nu)$. Условия (2) определяют в T^* решение $x^*(t)$ системы (1). Доказывается, что в каждой точке $t^{(i)}$ существуют пределы $x^*(t)$ с обеих сторон разрезов и что попарное совпадение этих пределов есть необходимое и достаточное условие того, чтобы в T существовало решение системы (1), удовлетворяющее условию (2). Показано, что для того, чтобы условие (2) определяло в T решение системы (1), необходимо и достаточно, чтобы $x_1^0, \ldots, x_p^0$ образовывали решение определенной линейной алгебраической системы νp уравнений с p неизвестными. *А. Д. Мышкис*

1204. **Исследования о существовании решения в вещественной области уравнения с частными производными при заданных начальных условиях.** Баяда (Considerazioni sull'esistenza della soluzione per un'equazione alle derivate parziali,con i dati iniziali, nel campo reale. Baiada Emilio), Ann. mat. pura ed appl., 1953, сер. 4, **34**, 1—25 (итал.)

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(x, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

где функция $f(x, q)$ определена при $c \leqslant x < \infty$, $-\infty < q < \infty$, непрерывна, ограничена и удовлетворяет по q условию Липшица с константой $^1/_2$. Начальное условие имеет вид $z(c, y)=\omega(y)$, где функция $\omega(y)$ определена при $-\infty < y < \infty$, имеет непрерывную ограниченную производную, удовлетворяющую неравенству $|\omega'(y+h)-\omega'(y-h)| \leqslant 2|h|M(y)$, где функция $M(y)$ суммируема на каждом конечном интервале (все величины предполагаются вещественными). Тогда для любых $e > c$, $a < b$ на прямоугольнике $c \leqslant x \leqslant e$, $a \leqslant y \leqslant b$ существует решение $z(x, y)$ поставленной краевой задачи, удовлетворяющее уравнению почти всюду на данном прямоугольнике, а начальному условию — всюду при $a \leqslant y \leqslant b$ и удовлетворяющее условию Липшица по совокупности аргументов.

Решение строится независимо от теории обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи образования последовательных приближений, введенных автором ранее (Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 1943, сер. 2, **12**, 135—145). Используется известная теорема Арцела и теорема о дифференцировании рядов, доказанная автором (Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 1952, **1—2**, 81—90); систематически применяется понятие сходимости по мере.

Дается критический анализ современного состояния изучения условий существования и, сравнительно с ними, условий единственности решения задачи Коши для уравнения с частными производными первого порядка; по поводу единственности см., в частности, статью автора (Atti Accad. naz. Lincei Rend., 1951, сер. 8, **11**, № 3—4, 158—164) и пример Паньи (Pagni M., Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1951, **20**, № 2, 470—474).

Все изложение достаточно подробно, однако чтение работы затруднено большим количеством (не менее 35) опечаток в формулах; приведем несколько наиболее существенных: на стр. 4, строка 15 сверху должно быть $c \leqslant x < \infty$ вместо $c \leqslant z \leqslant \infty$; в условии II, вверху, стр. 5, в правой части неравенства должен стоять дополнительный множитель 2; в формулировке теоремы на стр. 24—25 должно быть $f(x, q)$ вместо $f(x, y)$ и $x \geqslant c$ вместо $x > c$. *А. Д. Мышкис*

1205. **О периодических решениях одного нелинейного уравнения гиперболического типа.** Карп В. Н., Докл. АН Узб. ССР, 1953, № 5, 8—13

Строится решение уравнения $\partial^2 u/\partial t^2 - a^2 \partial^2 u/\partial x^2 = F(x, t, u, \partial u/\partial t, \partial u/\partial x)$ в области $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ при краевом условии $u(0, t)=u(1,t)=0$; $u(x, 0)=u(x, 1)$; $u_t'(x, 0)=u_t'(x, 1)$. В частном случае, когда $F \equiv \Phi(x, t)+\mu f(u)$, задача решалась Н. А. Артемьевым (Изв. АН СССР, сер. мат., 1937, № 1, 15—50), П. В. Соловьевым (Изв. АН СССР, сер. мат., 1939, № 2, 149—164) и А. П. Митряковым (Тр. Ин-та мат. и механики АН Узб. ССР, 1949, № 7, 137—149); здесь применен метод Д. Х. Каримова (Тр. Ин-та мат. и механики АН Узб. ССР, 1950, № 6, 67—106).

Функция F предполагается имеющей частные производные первого порядка, ограниченные и удовлетворяющие условию Липшица по совокупности аргументов, причем $F(0, t, 0, 0, 0)=0$, $F(x, t, 0, 0,0)=F(1-x, t, 0, 0,0)$; a считается целым, нечетным и достаточно большим. При доказательстве строятся последовательные приближения с последующим применением теоремы Арцела.

Приведено резюме на узбекском языке. *А. Д. Мышкис*

1206. **Об одной трудности в методе Римана.** Людфор (Sur une difficulté dans la méthode de Riemann. Ludford G. S. S.), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 24, 2293—2295 (франц.)

Пусть для уравнения $u_{xy}+au_x+bu_y+cu=0$ требуется решить задачу Коши на достаточно правильной кривой C с концами (x_1, y_1) и (x_2, y_2), причем касательная к C нигде не параллельна оси y и параллельна оси x в единственной точке (x_0, y_0), не являющейся для C точкой перегиба. Тогда метод Римана для кривой C (в целом) в обычном своем виде не применим.

Автор предлагает строить решение двузначным, причем одна ветвь должна быть определенной на прямоугольнике $[x_1, x_2; y_1, y_0]$, а другая — на $[x_1, x_2; y_0, y_2]$; на общей же стороне $y=y_0$, u, u_x и u_y, взятые для обеих ветвей, должны совпадать. Такая постановка задачи появляется, в частности, в плоскости годографа (Христианович С. А., Мат. сб., 1936, **1(43)**:4 511—534; Ludford G. S. S., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1952, **48**, 499—510). Детали в статье не обсуждаются, точных утверждений нет.

На стр. 2294, 15 строка снизу, имеется опечатка: вместо y_1 следует читать y_2. *А. Д. Мышкис*

1207. **Уравнение в частных производных Монжа — Ампера. Мартин** (The Monge—Ampère partial differential equation. Martin M. H.), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 1, 165—187 (англ.)

Изучение распространения плоской ударной волны может быть сведено к решению задачи Коши для уравнения

$$rt-s^2+\lambda^2=0, \text{ где } \lambda=X(x)Y(y). \qquad (1)$$

Уравнение (1) допускает промежуточные интегралы $\alpha(x, y, z, p, q)=\alpha, \beta(x, y, z, p, q)=\beta$ только при следующих λ (с точностью до преобразований переноса, растяжения и отражения отно-

сительно прямой $y = x$ плоскости (x, y)):

$$0;\ 1;\ Y(y);\ x^{m-1}y^{-m-1};\ \exp x \cdot \exp y.$$

В этих случаях интегрирование уравнения (1) может быть сведено к интегрированию линейных уравнений в частных производных первого и второго порядков и к квадратурам. Задача Коши для уравнения (1) сводится к задаче Коши для линейного уравнения в частных производных второго порядка в плоскости (α, β).

Б. Л. Рождественский

1208. Оценки модуля собственных функций. Э й д у с Д. М., Докл. АН СССР, 1953, 90, № 6, 973—974

Пусть Ω — конечная область m-мерного пространства, ограниченная замкнутой поверхностью Ляпунова Г. Пусть λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — собственные значения и $u_n(x)$, — нормированные условием

$$\int_{\Omega} u_n^2(x)\, d\Omega = 1,$$

— собственные функции уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ при краевом условии $u|_{\Gamma} = 0$.

В работе доказывается:

а) имеет место неравенство $|u_n(x)| < C\lambda_n^{m/4}$, $(x \in \Omega,\ n = 1, 2, \ldots)$, где C — постоянная, зависящая только от Ω;

б) пусть Ω_0 — любая область, содержащаяся с границей в Ω; тогда имеет место неравенство $|u_n(x)| < C_{\Omega_0}\lambda_n^{(m-1)/4}$, $(x \in \Omega_0,\ n = 1, 2, \ldots)$, где C_{Ω_0} зависит лишь от выбора Ω_0.

Отмечается, что результаты легко переносятся на случай уравнения $\Delta u + b(x)\, u + \lambda u = 0$, где $b(x)$ непрерывна в $\Omega + \Gamma$.

Х. Л. Смолицкий

1209. Об особенностях решений уравнения $\Delta u + cu = 0$. П и н и (Sulle singolarità delle soluzioni della equazione $\Delta u + cu = 0$. P i n i B r u n o), Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fiz., mat. e natur., 1953, 14, № 1, 21—26 (итал.)

Известно, что гармонические функции, равные нулю на границе области, могут быть отличны от нуля только тогда, когда они имеют особенности достаточно высокого порядка.

Автор обобщает аналогичные результаты Пиконе (Picone M., Atti 3° Congresso U. M. I., Roma, 1951, 69—71) о решениях уравнения

$$\Delta u + c(P)\, u = 0. \qquad (1)$$

Пусть r_i — расстояние точки P внутри области G_n до точки Q_i, принадлежащей части границы Γ_i размерности $\leqslant n-2$ и

$$\omega(P) = \sum_i \int \frac{d\Gamma_i}{r_i^{\alpha}},\quad n - 3 < \alpha < n - 2.$$

Если

$$\frac{u(P)}{\omega(P)} \to 0$$

в среднем с показателем $s > 1$ по (гладким) поверхностям, стремящимся к границе, и $u(P)$ удовлетворяет уравнению (1), то $u \equiv 0$ при условиях:

$$\alpha < \frac{s-1}{s}(n-2),\quad c(P) < \frac{\alpha}{\delta^2}\left(n - 2 - \frac{\alpha s}{s-1}\right),$$ где

δ — диаметр области. Дается также усиление теоремы Пиконе с условиями поточечной сходимости.

Э. Э. Шноль

1210. Нелинейная диффузия в системах с обменом веществ. Х и р о н (Nonlinear diffusion in metabolic systems. H e a r o n J o h n Z.), Bull. Math. Biophys., 1953, 15, № 1, 15—21 (англ.)

Рассматривается система уравнений диффузии для концентраций веществ C_k:

$$-\nabla J_k + Q_k = \frac{\partial C_k}{\partial t},$$

где J_k, Q_k, C_k — соответственно поток, выделение и концентрация k-го вещества из числа участвующих в обмене.

Перечисляются общие свойства решений подобных систем в стационарном состоянии $\left(\frac{d}{dt} \equiv 0\right)$ в случае сферически симметричных систем, а также условия, накладываемые обычно на величины Q_k. В нелинейном случае (Q_k зависит от C_i и r) рассмотрение идет для двух законов диффузии 1) $J_k = -D_k \nabla C_k$ и 2) $J_k = -\sum_j D_{kj} \nabla C_j$.

В этих случаях исследуется поведение в нуле функций C_k, а также возможные направления потоков веществ J_k.

Б. Л. Рождественский

1211. Замечания о приближенном решении уравнения диффузии. I. Х и р о н (Comments on the approximate solution of the diffusion equation: I. H e a r o n J o h n Z.), Bull. Math. Biophys, 1953, 15, № 1, 23—31 (англ.)

Исследуется приближенный метод Рашевского для решения уравнения диффузии

$$-\nabla J + Q = \frac{\partial C}{\partial t},$$

где J — поток, Q — выделение, C — концентрация вещества.

Для случая $Q \not\equiv \text{const}$ оценивается погрешность приближенного решения. Она может быть весьма значительной, когда среднее (по объему) значение $\bar{Q} = 0$, а $Q \not\equiv 0$ (т. е. наряду с выделением имеет место поглощение вещества).

Б. Л. Рождественский

1212. Применение функционального анализа к пологой упругой оболочке, имеющей форму эллиптического параболоида. Ж г е н т и В. С., Докл. АН СССР, 1953, 90, № 1, 9—11

Полученные С. Г. Михлиным (Прикл. математика и механика, 1952, 16, № 4, 399—418) общие уравнения равновесия пологих оболочек рассматриваются для пологой оболочки, имеющей форму эллиптического параболоида. Устанавливается, что оператор, определяемый левыми частями этих уравнений, в рассматриваемом случае оказывается положительно определенным на множестве векторов смещений, удовлетворяющих условию жесткого закрепления по краю оболочки. Доказательство вытекает из полученного автором неравенства

$$2\mathfrak{Э}(U) \geqslant \gamma_*^2 \iint_G (u^2 + v^2 + w^2)\, dx\, dy, \qquad (1)$$

где $\mathbf{U}$ — вектор смещений с составляющими u, v, w, удовлетворяющий условиям жесткого закрепления

$$u = v = w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

на контуре пластинки; G — область пластинки; $\Im(\mathbf{U})$ — потенциальная энергия деформации, соответствующая вектору смещений $\mathbf{U}$; γ_* — положительная постоянная. Автор получает неравенство (1), подвергая выражение потенциальной энергии деформации оболочки некоторым простым преобразованиям и применяя затем неравенство Фридрихса.

Из положительной определенности оператора вытекает существование решения задачи о равновесии оболочки указанного типа при условии жесткого ее закрепления по краю, а также разрешимость этой задачи вариационными методами.

Отметим затрудняющую чтение статьи опечатку: в формуле (4) знак = следует заменить знаком $\geqslant$.

С. Г. Михлин

1213. Решение некоторых задач об изгибе упругой пластинки. К а л а н д и я А. И., Прикл. математика и механика, 1953, **17**, № 3, 293—310

Решается задача об изгибе тонкой упругой пластинки с опертым краем; предполагается, что круг конформно отображается на область пластинки при помощи полинома некоторой степени p (в статье неточно формулируется обратное требование). По известному методу Колосова—Мусхелишвили задача сводится к отысканию двух функций $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ комплексного переменного, голоморфных в области единичного круга и удовлетворяющих на его контуре некоторым краевым условиям; для рассматриваемого случая эти условия имеют вид:

$$2\,\mathrm{Re}\,\{\sigma^2\omega'(\sigma)\,[\overline{\omega(\sigma)}\,\Phi'(\sigma) + \omega'(\sigma)\,\Psi(\sigma)] + \lambda_0\,\overline{\omega'(\sigma)}\,\varphi'(\sigma)\} = f_1(\sigma), \qquad (1)$$

$$2\,\mathrm{Re}\,\{i\sigma\omega'(\sigma)\,[\overline{\varphi(\sigma)} + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma)]\} = f_2(\sigma); \qquad (2)$$

$$\omega'(\zeta)\,\Phi(\zeta) = \varphi'(\zeta), \quad \omega'(\zeta)\,\Psi(\zeta) = \psi'(\zeta).$$

Здесь σ — точка единичной окружности; $\omega(\zeta)$ — полином, реализующий конформное преобразование единичного круга на область пластинки; $f_1(\sigma)$ и $f_2(\sigma)$ — данные функции; λ_0 — некоторая постоянная. Скачки кусочно-голоморфных функций

$$\Omega_1(\zeta) = \begin{cases} \zeta^2\omega'(\zeta)\,[\overline{\omega}(\zeta^{-1})\,\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\,\Psi(\zeta)] + \\ \qquad + \lambda_0\,\overline{\omega'}(\zeta^{-1})\,\varphi'(\zeta); & |\zeta| < 1 \\ -\zeta^{-1}\,\overline{\omega'}(\zeta^{-1})\,[\omega(\zeta)\,\overline{\Phi}'(\zeta^{-1}) + \overline{\omega'}(\zeta^{-1})\,\overline{\Psi}(\zeta^{-1})] - \\ \qquad - \lambda_0\,\omega'(\zeta)\,\overline{\varphi'}(\zeta^{-1}); & |\zeta| > 1 \end{cases}$$

$$\Omega_2(\zeta) = \begin{cases} \zeta^{-1}\,\overline{\omega'}(\zeta^{-1})\,\varphi(\zeta) - \zeta\overline{\omega}\,(\zeta^{-1})\varphi'(\zeta) - \zeta\omega'(\zeta)\psi(\zeta); & |\zeta| < 1 \\ \zeta\,\omega'(\zeta)\,\overline{\varphi}\,(\zeta^{-1}) - \zeta^{-1}\omega(\zeta)\,\overline{\varphi'}(\zeta^{-1}) - \\ \qquad - \zeta^{-1}\,\overline{\omega'}(\zeta^{-1})\,\overline{\psi}\,(\zeta^{-1}); & |\zeta| > 1 \end{cases}$$

на единичной окружности равны соответственно $f_1(\sigma)$ и $if_2(\sigma)$. Отсюда вытекает, что

$$\Omega_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{f_1(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} + R_1(\zeta);$$

$$\Omega_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\sigma|=1}\frac{f_2(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} + R_2(\zeta),$$

где R_1 и R_2 — полиномы степени $p-1$ относительно ζ и ζ^{-1}. Предполагая их известными, находим $\varphi(\zeta)$ из линейного дифференциального уравнения первого порядка (1) и $\psi(\zeta)$ — из (2). Неизвестные коэффициенты функций R_1 и R_2 определяются затем из линейной алгебраической системы, которая строится и исследуется в предположениях, что $(p+1)(1-\mu)/4$ — нецелое число (μ — постоянная Пуассона) и что полином $\zeta^{p-1}\overline{\omega'}\,(\zeta^{-1})$ имеет только простые корни. В качестве примера рассмотрена бесконечная пластинка с эллиптическим вырезом. В статье решена по методу степенных рядов задача о равновесии опертой эллиптической пластинки.

С. Г. Михлин

1214. О нагревании цилиндра конечной длины заданными тепловыми источниками. С а л а и (Über die Erwärmung eines endlich langen Zylinders mit vorgegebenen Wärmequellen. S z a l a y L. von), Frequenz, 1953, **7**, № 3, 81—84 (нем.)

Ставится задача о нагревании кругового цилиндра конечных размеров постоянным электрическим током I:

$$\lambda\Delta u = c\rho\partial u/\partial t - W_0 u = 0 \text{ при } r = r_0,$$
$$\lambda\partial u/\partial z = \pm Q_0 \text{ при } z = \pm z_0 u = 0 \text{ при } t = t_0,$$

где $u = u(r, z, t)$ — температура цилиндра; W_0 и Q_0 — постоянные величины, представляющие собой плотности тепловых источников: $Q_0 = I^2R_a/\pi r_0^2$, $W_0 = I^2/(\pi r_0^2)^2\varkappa$, где $\varkappa$ — проводимость цилиндра; R_a — контактное сопротивление его торцевых поверхностей.

Задача решается классическими методами. Решение имеет вид:

$$u(r, z, t) = W_0(r_0^2 - r^2)/4\lambda + 2\sum_{n=1}^{\infty}(1/k_n r_0 J_1(k_n r_0)\lambda) \times$$
$$\times\{Q_0\mathrm{ch}k_n z/k_n\mathrm{sh}k_n z_0 - [W_0 + Q_0/z_0]\exp(-\lambda k_n^2 t/c\rho)/k_n^2 +$$
$$+ (2Q_0/z_0)\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\exp[-\lambda[k_n^2 + (m\pi/z_0)^2]t/c\rho] \times$$
$$\times\cos(m\pi z/z_0)/[k_n^2 + (m\pi/z_0)^2]\}\cdot J_0(k_n r),$$

где k_n — корень уравнения $J_0(kr_0) = 0$.

Рассматривается задача об остывании цилиндра от достигнутого состояния при условиях:

$$u = 0 \text{ при } r = r_0,$$
$$u = 0 \text{ при } z = \pm z_0,$$
$$u = u_s \text{ при } t = 0,$$

где u_s — стационарная часть решения первой задачи. Решение этой задачи имеет вид:

$$u(r, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}J_0(k_n r)\cos[(2m-1)\times$$
$$\times\pi z/2z_0]\exp\{-\lambda[k_n^2 + (2m-1)^2\pi^2/(2z_0)^2]t/c\rho\},$$

где

$$C_{mn} = [4(-1)^m - 1/k_n^2 r_0 z_0 J_1(k_n r_0)\lambda]\ [W_0/a_m k_n + a_m Q_0 \operatorname{cth} k_n z_0/(a_m^2 + k_n^2)],\ a_m = (2m-1)\pi/2z_0.$$

Оба решения представлены графически. *В. Б. Гласко*

1215. **О решении уравнения Рейнольдса для смазки в подвижных опорах. III. Чарнс, Сейбл, Ин** (On the solution of the Reynolds equation for slider-bearing lubrication. III. Charnes A., Saibel E., Ying A. S. C.), Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs, 1953, 75, № 4, 507—513 (англ.)

Требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h^3 \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x},$$

определенное в некотором прямоугольнике на плоскости (x, y) и равное нулю на границе прямоугольника. Полагая

$$h^3 = H = H_0 + \lambda H_1 + \lambda^2 H_2 + \ldots$$
$$6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} = g = g_0 + \lambda g_1 + \lambda^2 g_2 + \ldots$$
$$p(x, y) = p_0 + \lambda p_1 + \lambda^2 p_2 + \ldots,$$

авторы составляют уравнения для последовательного определения коэффициентов при различных степенях параметра λ в разложении неизвестной функции $p(x, y)$. Для случая

$$H = a^3 \exp(3bx + 3cy^2);\ \lambda = 3c$$

определяются функции $p_0(x, y)$, $p_1(x, y)$. Решение уравнения, определяющего $p_0(x, y)$, приводилось ранее (Charnes A., Saibel E., Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs, 1952, **74**, 867—873).

Используя результаты указанной работы, авторы находят функцию $p_1(x, y)$ в виде ряда, формально удовлетворяющего уравнению, определяющему эту функцию:

$$p_1(x, y) = F(y)\exp(-2bx) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{B} G_n(y)\exp(-3bx/2) + \sum_{m=1}^{\infty}(E_m \sin h\,\xi_m x + F_m \cos h\,\xi_m x)\cos(2m-1)\times \frac{\pi y}{L}\exp(3bx/2).$$

Здесь A_n, E_m, F_m, ξ_m — постоянные, а $F(y)$, $G_n(y)$ — функции, выражения для которых приведены.

В заключение даны формулы, позволяющие найти величины полной нагрузки и силы трения при помощи найденного значения давления $p(x, y)$. *Н. В. Адамов*

1216 **РЕЦ. Дифференциальные уравнения математической физики. Левин, Гросберг** (Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Lewin W. I., Großberg J. I., S. 484, 93 graph., VEB Verlag Technik, Berlin, Darst., 18.50 DM) [**Рецензия: Штарке** (Starke D.), Chem. Technik, 1953, 5, № 6, 338 (нем.)]

1217 **РЕЦ. Основы теории бигармонических полиномов. Цвейлинг** (Grundlagen einer Theorie der biharmonischen Polynome. Zweiling K., S. 89, Abb., Verlag Technik, Berlin, 13.50 DM) [**Рецензия: Марун** (Maruhn), Technik, 1953, 8, № 6, 424 (нем.)]

1218 **РЕЦ. Лекции о проблеме Коши в линейных дифференциальных уравнениях с частными производными. Адамар** (Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. Hadamard J., pp. 316, Dover Publications, New York, 1952) [**Рецензия: Функ** (Funk P.), Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 27/28, 34 (нем.)]

1219 **Д. Краевые задачи для уравнения Гельмгольца в некоторых полубесконечных областях. Шатунов М. П.** Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., ЛГУ, Л., 1953

1220 **Д. Аналитические решения задачи Гурса. Сохань А. М.** Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1953

См. также: 1008, 1011, 1018 **РЕЦ**, 1071, 1133, 1151, 1177, 1181 **Д**, 1224 **РЕЦ**, 1225, 1226, 1236, 1239, 1252, 1257, 1261 **РЕЦ**, 1272, 1276, 1384, 1388, 1401—1406, 1409, 1420 **РЕЦ**, 1431, 1480

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1221. **Об одном классе многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра. Чертков, Хаскинд** (Про один клас багатовимірних інтегральних рівнянь типу Вольтерра. Чертков Й. Я., Хаскінд М. Д.), Наукови зап. Миколаївського держ. пед. ін-ту, 1953, № 4, 136—145 (укр.)

Если $A(x_1, \ldots, x_n)$, $B(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — точки n-мерного евклидова пространства, то

$$\int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_n} f(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n$$

обозначается сокращенно $\int_0^A f(B)\cdot dB$. Обобщая операционное исчисление на функции нескольких переменных, авторы решают интегральное уравнение

$$a\cdot\gamma(A) = \psi(A) + \lambda\cdot\int_0^A \gamma(B)\cdot k(A-B)\cdot dB, \qquad (*)$$

которое после перехода от «оригиналов» к «изображениям» превращается в элементарное алгебраическое уравнение

$$a\Gamma(P) = \Psi(P) + \lambda \cdot \Gamma(P) \cdot K(P) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right)^{-1}$$

относительно изображения $\Gamma(P)$ искомой функции $\gamma(A)$. В качестве приложения для уравнения

$$\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} \gamma(\xi_1, \xi_2) \cdot \frac{\cos[\nu \cdot \sqrt{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}]}{\sqrt{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}}\, d\xi_1 d\xi_2 = -\psi(x_1, x_2)$$

находится решение в виде

$$\gamma(x_1, x_2) = -\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} \psi(\xi_1, \xi_2)\, f_2(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2,$$

где

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\cos(\nu\sqrt{x_1x_2})}{\sqrt{x_1x_2}} + \nu\left[\mathrm{Si}(\nu\sqrt{x_1x_2}) - \frac{\pi}{2}\right]\right\},$$

$$\mathrm{Si}(z) = -\int_z^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, du.$$

При этом используется то, что соотношению $\Gamma(P) = F_1(P) \cdot F_2(P)$ между изображениями соответствует соотношение

$$\gamma(A) = \frac{\partial}{\partial A}\int_0^A f_1(B) \cdot f_2(A-B)\, dB$$

между оригиналами.

Примечание референта. Авторы, повидимому, не знакомы с книгой Б. Ван дер Поля и Х. Бреммера «Операционное исчисление...», 1952, содержащей специальную главу XVI, посвященную операционному исчислению функций нескольких переменных. Авторы не упоминают также и того, что операционный метод решения уравнения (*) известен и изложен, например, (при $n = 1$) в цитируемой ими же (по другому поводу) книге А. И. Лурье «Операционное исчисление» (Гостехиздат, 1951, стр. 389). В статье имеется много опечаток. *М. К. Фаге*

1222. Существование собственных функций у нелинейных интегральных операторов с непозитивными ядрами и у произведения самосопряженного и потенциального операторов. Вайнберг М. М., Мат. сб., 1953, **32(74)**:3, 665—680

Рассматривается система нелинейных интегральных уравнений

$$\mu u_i(x) = \int_{\mathfrak{B}} K_i(x, y)\, g_i(u_1(y), \ldots, u_n(y), y)\, dy \qquad (i = 1, \ldots, n;\ x \in \mathfrak{B}) \qquad (1)$$

(все величины вещественны), где $\mathfrak{B}$ — измеримое множество s-мерного евклидова пространства, а каждое ядро $K_i(x, y) \in L_p$ $(p \geqslant 2)$, симметрично и имеет ортонормированную систему собственных функций $\varphi_{i1}(x), \varphi_{i2}(x), \ldots$, соответствующих собственным значениям $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots$, причем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{ik}(x)\, \varphi_{ik}(y) / \lambda_{ik}$$

сходится в L_p, а среди чисел λ_{ik} $(i = 1, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots)$ имеются как положительные, так и отрицательные, причем положительных — конечное число (это является характерной особенностью данной работы). Пусть функции $g_i(u_1, \ldots, u_n, x)$ непрерывны по $(u_1, \ldots, u_n)$ для $-\infty < u_1, \ldots, u_n < \infty$ и измеримы в $\mathfrak{B}$ по x, причем

$$g_i(u_1, \ldots, u_n, x) = \frac{\partial G(u_1, \ldots, u_n, x)}{\partial u_i},$$

$$G(0, \ldots, 0, x) \equiv 0,$$

если все $u_i(x) \in L_p(\mathfrak{B})$, то и все $g_i(u_1(x), \ldots, u_n(x), x) \in L_q(\mathfrak{B})$ $(1/p + 1/q = 1)$; кроме того, пусть

$$\int_{\mathfrak{B}} G(u_1(y), \ldots, u_n(y), y)\, dy \to +\infty$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathfrak{B}} |u_i(y)|^p\, dy \to \infty.$$

Тогда система (1) имеет не менее счетного числа собственных функций, принадлежащих $L_{p,n}$ (т. е. прямой сумме n пространств $L_p(\mathfrak{B})$), нормы которых в $L_{p,n}$ неограничены.

Доказательство основано на исследовании значений функционала

$$\int_{\mathfrak{B}} G\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sgn}\lambda_{1k}\sqrt{|\lambda_{1k}|}\,\xi_{1k}\varphi_{1k}(x), \ldots, \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sgn}\lambda_{nk}\sqrt{|\lambda_{nk}|}\,\xi_{nk}\varphi_{nk}(x),\ x\Big)\, dx$$

на гиперболоиде

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sgn}\lambda_{ik}\xi_{ik}^2 = c^2$$

в прямой сумме n гильбертовых пространств (с точками $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots$); эта прямая сумма аппроксимируется конечномерными евклидовыми пространствами с последующим предельным переходом. Систематически используются понятия функционального анализа и результаты, полученные автором ранее (Мат. сб., 1950, **26 (68)**, 365—394; Усп. мат. наук, 1952, **7**, № 4 (50), 55—101).

Полученные результаты обобщаются на операторное уравнение в (вещественном) гильбертовом пространстве

$$\mu x = BF(x) \qquad (x \in E), \qquad (2)$$

где B—линейный самосопряженный вполне непрерывный оператор в E, имеющий и положительные и отрицательные собственные значения, причем число первых конечно; $F(x)$ —сильно потенциальный оператор в E (т. е. градиент функционала, введенный на основе понятия сильного дифференциала, как это сде-

лано в цитированной работе автора в Усп. мат. наук), для которого $\lim\limits_{||x||\to\infty} \int\limits_0^1 (F(tx), x)\,dt = +\infty$. В высказанных предположениях уравнение (2) имеет не менее счетного числа решений, нормы которых неограничены. При доказательстве, основанном на исследовании значений соответствующего функционала на некоторой гиперболической области в E, используется теорема Л. А. Люстерника в том виде, в каком она была изложена автором (Усп. мат. наук, 1952, **7**, № 2 (48), 197—200, теор. А). Особенно подробно изучается случай, когда $(F(x), x) > 0$ при $||x|| > 0$.

Доказательства достаточно подробны, однако не всюду сделаны все необходимые оговорки: например, не сказано, что $\mathfrak{B}$ имеет конечную меру и что $c > 0$. Имеется список работ в данном направлении и краткий сравнительный обзор применяемых в них методов. Статья в целом дает полное изложение результатов, полученных автором ранее (Докл. АН СССР, 1951, **78**, № 6, 1077—1080; **80**, № 3, 309—311). *А. Д. Мышкис*

1223 РЕЦ. Практическое руководство по интегральным уравнениям. Бюкнер (Die praktische Behandlung von Integral-Gleichungen. Bückner H., S. 127, 1 Bild., Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1952, 18.60 DM) [Рецензии: **Еккель** (Jaeckel K.), Forsch. Gebiete Ingenieurwesens, 1953, Ausgabe B., **19**, № 1, 29; **Бергер** (Berger F.), Z. Österr. Ingr- und Archit.-Vereines, 1953, **98**, № 9—10, 99 (нем.)]

1224 Д. Нелинейные сингулярные интегральные уравнения и нелинейные краевые задачи теории эллиптических дифференциальных уравнений. Кропачев В. Ф. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Казанский гос. ун-т, Казань, 1953

См. также: 1155, 1166, 1184, 1226, 1258, 1260 РЕЦ, 1405

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1225. Вариационный метод решения плоской задачи теории упругости для односвязной области, ограниченной двумя произвольными кривыми и двумя параллельными прямыми. Пыхтунов М. Т., Инж. сб., 1953, **15**, 43—60

Рассматривается плоское напряженное состояние пластинки, ограниченной отрезками двух прямых, параллельных оси ординат, и кривыми $y = h_1(x)$, $y = h_2(x)$. На контуре пластинки задается внешняя нагрузка, причем предполагается, что на участках контура, параллельных оси y, составляющие нагрузки являются многочленами относительно y.

Задача решается приближенно по принципу Кастильяно. Составляющие напряжений ищутся в виде суммы двух слагаемых, одно из которых сразу находится по данным задачи, а второе приближенно представляется в виде многочлена относительно y с коэффициентами, зависящими от x. Принцип Кастильяно сразу позволяет написать систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (вариационных уравнений Эйлера) для этих коэффициентов.

Автор применяет свой прием к задаче об одновременном изгибе и растяжении пластинки, симметричной относительно оси x, в частности прямоугольной пластинки, но коэффициенты определяет не из упомянутой выше системы дифференциальных уравнений, а из другой, значительно более простой системы. Автор утверждает, не приводя доказательства, что построенное таким образом приближенное решение характеризует краевой эффект вблизи вертикальных сторон пластинки.

Идея сведения вариационной задачи в случае многих независимых переменных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений не нова. Это отмечается автором, который указывает, что таким методом пользовались А. И. Лурье и Н. Н. Бабаев в 1939 г. В связи с этим можно заметить, что метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям был разработан Л. В. Канторовичем еще в 1933 г.; этот метод подробно изложен в книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова (Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, М.— Л., 1949). *С. Г. Михлин*

1226. О некоторых вариационных задачах, встречающихся в теории динамического планирования. Белман, Гликсберг, Гросс (On some variational problems occurring in the theory of dynamic programming. Bellman Richard, Glicksberg Irving, Gross Oliver), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 4, 298—301 (англ.)

Без доказательства сообщаются решения некоторых вариационных задач, связанных с проблемой контроля над системой в течение конечного промежутка времени. Приводим две теоремы:

Теорема 1. Пусть функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению $du/dt = -u + f(t)$, причем $u(0) = 1$. В классе функций $f(t)$, подчиненных неравенствам $0 \leqslant f(t) \leqslant a_1 > 1$, $\int\limits_0^T f(t)\,dt \leqslant a_2 < T$, где a_1, a_2 и T—постоянные, интеграл $\int\limits_0^T (1-u)^2 dt$ достигает минимума при

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant a_3, \\ a_4, & a_3 < t < a_5, \\ 0, & a_5 \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

где постоянные a_3, a_4, a_5 определяются из некоторых трансцендентных уравнений.

Теорема 3. Пусть функции x_i и y_i связаны уравнениями

$$x_i(0) = c_i, \quad dx_i/dt = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} y_j; \quad i = 1, 2, \ldots, N;$$

$$a_{ij} = \text{const} > 0.$$

Минимум интеграла

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)\, dt$$

при условиях $0 \leqslant y_i \leqslant x_i$ достигается на функциях

$$y_i = \begin{cases} x_i, & 0 \leqslant t \leqslant T_i, \\ 0, & T_i < t \leqslant T, \end{cases}$$

где T_i — постоянные, определяемые данными задачи.

С. Г. Михлин

1227 РЕЦ. **Вариационное исчисление. Эльсгольц Л. Э.**, 168 стр., Гостехиздат, М.— Л., 1952, 5 р. 30 к. [**Рецензия: Канторович Л. В.**, Сов. книга, 1953, № 6, 32—33]

1228 РЕЦ. **Вариационное исчисление. Уэйнсток** (Calculus of variations. Weinstock R., pp. 326, Mc Graw-Hill, New York, 1952) [**Рецензия: Булиган** (Bouligand G.), Rev. gén. sci. pures et appl., 1953, 60, № 3—4, 120 (франц.)]

См. также: 1222, 1261 **РЕЦ**

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

1229 Теорема об ограниченных моментах. Микусинский, Рылл-Нардзевский (A theorem on bounded moments. G.-Mikusiński J., Ryll-Nardzewski C.), Studia math., 1953, **13**, № 1, 51—55 (англ.)

Доказана следующая теорема:

Если $\beta_1, \beta_2, \ldots$ — последовательность положительных чисел и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} = \infty, \quad \beta_{n+1} - \beta_n > \varepsilon > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

и если $f(x)$ — функция, интегрируемая в конечном интервале $[1, b]$, то из бесконечной последовательности неравенств

$$\left| \int_1^b x^{\beta_n} f(x)\, dx \right| < M \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

следует, что $f(x) = 0$ почти везде в интервале $[1, b]$.

Для случаев, когда $\beta_n = n$ и $\beta_n = n^\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, теорема была доказана в двух предыдущих статьях первого из авторов (Colloquium math., 1951, **2**, 138—141; Studia math., 1951, **12**, 191—193).

Для доказательства основной теоремы реферируемой статьи используется особое семейство функций $\varphi_m(x)$ $(m = 1, 2, \ldots)$, построенных в статье Микусинского (см. реф. 1247). Эти функции имеют вид

$$\varphi_m(x) = 1 - \alpha_1^{(m)} x^{\beta_m} + \alpha_2^{(m)} x^{\beta_{2m}} - \cdots,$$

где

$$\alpha_\mu^{(m)} = \frac{1}{c} \prod_{\nu=1} \frac{\beta_{m\nu}}{|\beta_{m\nu} - \beta_{mn}|} \exp\left(-\frac{\beta_{mn}}{\beta_{m\nu}}\right).$$

Для них доказывается, что

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leqslant x < 1) \\ 0 & (1 < x < \infty). \end{cases}$$

Н. И. Ахиезер

1230. Теорема о возрастающих выпуклых функциях. Чжуан Ци-тай (Un théorème sur les fonctions convexes croissantes. Chuang Chi-Tai), Sci. Record, 1952, **5**, № 1—4, 1—9 (франц.)

Пусть $\alpha > 0$, $0 < \lambda < 1$, $U(x)$ — положительная неубывающая при $x \geqslant 0$ функция такая, что

$$\int_0^\infty \frac{dx}{U(x)} < \infty.$$

Положим

$$H_{\alpha,\lambda,U} = \frac{2\alpha}{1-\lambda} + \int_0^\infty \frac{dx}{U(x)},$$

$$\Phi_{\alpha,\lambda,U}(X) = \frac{H_{\alpha,\lambda,U}}{X} \frac{2\alpha}{1-\lambda} + \int_X^\infty \frac{dx}{U(x)}.$$

Очевидно, что $\Phi_{\alpha,\lambda,U}(X)$ положительна, непрерывна и не убывает при $X > 0$, причем $\lim\limits_{X\to 0} \Phi_{\alpha,\lambda,U}(X) = \infty$, $\lim\limits_{X\to\infty} \Phi_{\alpha,\lambda,U}(X) = 0$. Пусть $X = \Psi_{\alpha,\lambda,U}(Y)$ — функция, обратная к $Y = \Phi_{\alpha,\lambda,U}(X)$. Очевидно, что $\Psi_{\alpha,\lambda,U}(Y)$ положительна, непрерывна и убывает при $Y > 0$, причем

$$\lim_{Y\to 0} \Psi_{\alpha,\lambda,U}(Y) = 0, \quad \lim_{Y\to\infty} \Psi_{\alpha,\lambda,U}(Y) = \infty.$$

Доказывается теорема:

Пусть функция $m(t)$ выпукла и возрастает при $t < 0$, причем ее правая производная $m'_+(t)$ удовлетворяет неравенству $m'_+(t) \geqslant 1$ при $t < 0$. Пусть $U(x)$ удовлетворяет указанным выше условиям. Тогда, если найдется t_0 такое, что $m(t_0) \geqslant \Psi_{\alpha,\lambda,U}(-t_0)$, то найдутся три числа t_1, t_2, t_3, удовлетворяющие условиям:

1) $-H_{\alpha,\lambda,U} \leqslant t_1 < t_2 < t_3 < 0$,

2) $m(t_2) - m(t_1) = m(t_3) - m(t_2) = \alpha$,

3) $\lambda(t_2 - t_1) < t_3 - t_2 \leqslant t_2 - t_1$,

4) $m(t_2) \geqslant \alpha$,

5) $m'_+(t_2) \leqslant U[m(t_2)]$.

Автор предполагает дать в другой работе приложения этой теоремы к изучению функций, регулярных в единичном круге. *С. М. Лозинский*

1231. Об одном обобщенном производном операторе. Мопперт (Über einen verallgemeinerten Ableitungsoperator. Moppert K.-F.), Comment. math. helv., 1953, 27, № 2, 140—150 (нем.)

Положим для действительной функции $f(x)$, определенной в интервале $x_0 < x \leqslant x_1$, и любого действительного числа α

$$D_n^\alpha f(x)\Big|_{x_0}^{x_1}(x) = \left(\frac{n}{x_1 - x_0}\right)^\alpha \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} \times \times f\left(x_1 - \nu\,\frac{x_1 - x_0}{n}\right). \qquad (1)$$

Если выражение (1) имеет предел при $n \to \infty$, то обозначим его через $D^\alpha f(x)\Big|_{x_0}^{x_1}(x)$ и назовем D-производной функции $f(x)$ с показателем α от x_0 до x_1. Указанное определение принадлежит Грюнвальду (Grünwald A. K., Z. Math. und Phys., 1867, 12, 441). Легко проверяется, что $D^0 f(x)\Big|_{x_0}^{x_1}(x) = f(x_1)$ и $D^\alpha f(x)\Big|_{x_0}^{x_1}(x) = f^{(\alpha)}(x)$, если $\alpha = 1, 2, \ldots$ и $f^{(\alpha)}(x)$ непрерывна в окрестности x_1.

Доказываются следующие утверждения:

1. Пусть $\alpha < 0$, $\beta < 1$. Если $f(x)$ дифференцируема в интервале $x_0 < x \leqslant x_1$ и $f(x) = O((x - x_0)^{-\beta})$ при $x \to x_0$, то выражение (1) имеет предел:

$$D^\alpha f(x)\Big|_{x_0}^{x_1}(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{x_0}^{x_1} \frac{f(x)}{(x_1 - x)^{\alpha+1}}\,dx.$$

В частности, $D^{-1} f(x)\Big|_{x_0}^{x_1}(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$.

2. Пусть $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1, 2 \ldots$, $\beta > 1$. Если $f(x)$ ($[\alpha] + 1$) раз непрерывно дифференцируема в интервале $x_0 < x \leqslant x_1$ и $f^{([\alpha]+1)}(x) = O((x - x_0)^{-\beta-1})$ при $x \to x_0$, то выражение (1) имеет предел:

$$D^\alpha f(x)\Big|_{x_0}^{x_1}(x) = \left(\frac{d}{dx_1}\right)^{1+[\alpha]} \frac{1}{\Gamma(1 + [\alpha] - \alpha)} \int_{x_0}^{x_1} \frac{f(x)}{(x_1 - x)^{\alpha - [\alpha]}}\,dx.$$

Устанавливаются также свойства D-производной как оператора. *И. Е. Жак*

1232. Свойства симметрии и их чередование при дифференцировании и интегрировании. Платоне (Proprietà di simmetria che si trasmettono per derivazione e integrazione. Platone Giulio), Archimede, 1953, 5, № 2, 56—59 (итал.)

Автор записывает свойство кривой $y = f(x)$ быть симметричной относительно точки (a, b) в форме тождества относительно τ

$$f(a + \tau) + f(a - \tau) = 2b$$

и свойство той же кривой быть симметричной относительно прямой $x = a$ в направлении $b(= \operatorname{tg}\theta)$ — в форме аналогичного тождества

$$f(a + \tau) - f(a - \tau) = 2b\tau.$$

Он показывает, далее, как наличие одного из этих свойств у самой функции влечет за собой наличие другого свойства у ее производной и интеграла. *В. Л. Гончаров*

1233. К вопросу об аналитическом и геометрическом определениях тригонометрических функций. Гайдук Ю. М., Математика в школе, 1953, № 4, 1—7

Определение $\cos x$ как решения функционального уравнения $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$, удовлетворяющего дополнительным условиям непрерывности и нормировки.

1234 РЕЦ. Анализ. Современный подход. Менгер (Calculus. A modern approach. Menger Karl, pp. 255 + XXV, figs. 46, The Bookstore, Illinois Institute of Technology, Chicago, 4.50 doll.) [**Рецензия: Херцог** (Herzog Fritz), Amer. J. Phys., 1953, 21, № 5, 398—399 (англ.)]

Отмечается, что основная особенность рецензируемой книги, являющейся по назначению обычным начальным курсом математического анализа,— это введение и систематическое применение новой, более краткой системы обозначений, соответствующей современному пониманию логической структуры основных понятий анализа.

Так, вместо традиционных обозначений

$$f(x),\ \sin x,\ f(g(x)),\ \frac{dy}{dx},\ \int_a^b f(x)\,dx$$

используются обозначения f, $\sin$, fg (произведение обозначается $f.g$), Dy, $\int_a^b f$ и т. п. В рецензии обсуждаются достоинства новой системы обозначений, ее перспективы и связанные с ней трудности.

1235 РЕЦ. Высшая математика. Роте (Höhere Mathematik. Rothe R., pp. 1000, 4 v., Teubner, Leipzig, 1952) [**Рецензия: Фюрст** (Fürst D.), Nuovo cimento, 1953, 10, № 4, 507—508 (итал.)]

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

1236. Эпициклоидальные функции. Эрдейи (Funzioni epicicloidali. Erdélyi Arthur), Atti. Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, 14, № 3, 393—394 (итал.)

Как непосредственные следствия одной известной теоремы сложения для бесселевых функций выводятся соотношения

$$E^{(k)}(\rho, \varphi, \lambda) = J\ (\lambda R)\cos k\theta,$$

$$E^{*(k)}(\rho, \varphi, \lambda) = J_k(\lambda R)\sin k\theta,$$

выполненные при любом целом k. Здесь J_k — функция Бесселя первого рода с индексом k; R, θ — полярные координаты точки плоскости xy, а $E^{(k)}$ и

$E^{*(k)}$ — определенная система частных решений уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\lambda^2 u=0$$

в эпициклоидальных координатах ρ, φ, т. е. в координатах, которые связаны с декартовыми координатами x, y соотношениями:

$$x=na\rho\cos\varphi+b\rho^n\cos n\varphi$$
$$y=na\rho\sin\varphi+b\rho^n\sin n\varphi.$$

Здесь n, a и b — положительные числа, причем n — целое. Эти частные решения впервые были рассмотрены Агостинелли (Agostinelli C., Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis. mat. e natur., 1949, 7, 316—320) и названы им эпициклоидальными функциями. *М. Б. Гагуа*

1237. О фильтрации в трапецоидальных плотинах с вертикальным верховым откосом. Михайлов Г. К., Прикл. математика и механика, 1953, **17**, № 2, 189—199

При решении указанной в заглавии статьи механической задачи автор вычисляет некоторые интегралы от гипергеометрических функций.
В. В. Немыцкий

1238. Преобразование Якоби. Скотт (Jacobi transforms. Scott E. J.), Quart. J. Math., 1953, **4**, № 13, 36—40 (англ.)

Если $P_n^{\alpha,\beta}(x)$—многочлен Якоби, то преобразованием Якоби функции $F(x)$, определенной на интервале $(-1, 1)$, называют

$$J\{F(x)\}=f^{(\alpha,\beta)}(n)=\int_{-1}^{1}F(x)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx. \qquad (1)$$

В предположении, что имеет место разложение

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x),$$

получаются взаимные формулы (1) и

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\delta_n}f^{(\alpha,\beta)}(n)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \qquad (2$$

где

$$\delta_n=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)},$$

$$c_n=\frac{1}{\delta_n}f^{(\alpha,\beta)}(n).$$

Преобразование Якоби применяется для того, чтобы исключить из уравнения в частных производных следующую группу членов:

$$\partial/\partial x\{(1-x^2)\,\partial U(x,t)/\partial x\}+$$
$$+[(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)x]\,\partial U(x,t)/\partial x.$$

В частности, рассмотрено одномерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right]+\frac{a+bx}{d}\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}=$$
$$=\frac{\rho c}{d}\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}$$

с начальными и краевыми условиями

$$U(x,0)=F(x),\quad(-1<x<1),$$
$$U(1,t)=\varphi(t),\quad U(-1,t)=\psi(t)\quad(t>0).$$

Рассуждения автора, как признает он сам, носят формальный характер и нуждаются в обосновании.
П. И. Кузнецов

1239. Ряд Неймана для произведения двух функций Уиттекера. Хенрич (A Neumann series for the product of two Whittaker functions. Henrici Peter), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 2, 329—334 (англ.)

При произвольных комплексных r, θ, k и $4\mu\neq-1,-2,\ldots$ названный в заголовке ряд имеет следующий вид:

$$M_{k,\mu}\{ir(1+\cos\theta)\}\,M_{k,\mu}\{-ir(1-\cos\theta)\}\times$$
$$\times(r\sin\theta)^{-(2\mu+1)}=2^{2\mu+1/2}\Gamma(2\mu+1/2)\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n(2\mu+1/2+n)(\mu+k+1/2)_n}{(2\mu+1)_n}\times \qquad (1)$$
$$\times{}_3F_2(\mu+1/2+k,\,-2\mu-n,\,-n;\,-k+$$
$$+1/2-\mu-n,\,2\mu+1;\,1)\,r^{-(2\mu+1/2)}\times$$
$$\times J_{2\mu+1/2+n}(r)\,C_n^{(2\mu+1/2)}(\cos\theta).$$

Из различных частных случаев в работе рассмотрены случаи

$$\theta=0;\quad k=0\quad\text{и}\quad k=\mu+1/2.$$

Левая часть, а также отдельные члены правой части (1) удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{4\mu+1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+u=0. \qquad (2)$$

При выводе (1) остается без доказательства допущение, что для $2\mu+1/2\neq0,-1,-2,\ldots$ каждое регулярное в окрестности $x=y=0$ решение (2) можно разложить в ряд типа (1). *Э. Я. Риекстыныш*

1240 Д. Неполная бэта-функция и ее применения. Джалалов С. Д. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Среднеазиатский гос. ун-т, Ташкент, 1953

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1241. Борелевское суммирование двойных рядов. Берекашвили В. А., Сообщ. АН Груз. ССР, 1953, **14**, № 4, 193—196

Двойной ряд с частными суммами $S_{m,n}$ будем называть B_λ-суммируемым к числу S, если функция

$$f(t,\tau)=\sum_0^{\infty}\sum_0^{\infty}S_{m,n}\frac{t^m}{m!}\frac{\tau^n}{n!}$$

конечна при всех значениях t и τ и

$$\lim_{(t,\tau)_\lambda \to \infty} e^{-t-\tau} f(t, \tau) = S,$$

где символ $(t, \tau)_\lambda \to \infty$ означает такое стремление переменных t и τ к $+\infty$, при котором $1/\lambda \leqslant t/\tau \leqslant \lambda$.

Доказывается следующая теорема:

Если двойной ряд сходится и его частные суммы $S_{m,n}$ удовлетворяют условию

$$|S_{m,n}| \leqslant A a^{o(m)+o(n)},$$

где A, a — произвольные положительные числа, то он B_λ-суммируем к той же сумме. *И. Е. Жак*

1242. Нормы полей Теплица. Брудно А. Л., Докл. АН СССР, 1953, 91, № 1, 11—14

В множестве R ограниченных последовательностей $x = \{x^1, x^2, \ldots\}$ вводятся нормы

$$|x| = \sup |x^k| \text{ и } \|x\| = \overline{\lim} |x^k|.$$

Рассматриваются матрицы Теплица $A = (a_k^n)$; n-я строка такой матрицы $A^n = \{a_1^n, a_2^n, \ldots\}$.

Матрицы A (при соответствующем нормировании R) определяют линейные функционалы

$$A^n(x) = a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \ldots,$$

$$\mathfrak{A}(x) \equiv A^\infty(x) = \lim A^n(x) \quad (x \in \mathfrak{A})$$

(т. е. пределы, к которым матрица A суммирует ограниченные последовательности) и линейный оператор

$$A(x) = \{A^1(x), A^2(x), \ldots\}.$$

Нормы функционалов и операторов выражаются через коэффициенты матрицы A:

$$|A^n| = |a_1^n| + |a_2^n| + \ldots;$$

$$|A| = \sup |A^n|; \quad \|A\| = \overline{\lim} |A^n|.$$

Первое из этих чисел называют нормой строки A^n, второе и третье — нормой матрицы A. Определяется «поле матрицы A» как множество $\mathfrak{A} \subset R$ последовательностей, суммируемых матрицей A, вводятся «нормы поля $\mathfrak{A}$» и дается понятие о «реализации норм». Доказываются две теоремы:

Теорема 1. Норма ограниченного поля $\mathfrak{A}$ реализуется в точке x_a, для которой

$$|x_a| = \|x_a\| = 1, \quad \mathfrak{A}(x_a) = \|\mathfrak{A}\| \quad (= |\mathfrak{A}|).$$

Теорема 2. Норма ограниченного поля $\mathfrak{A}$ равна нижней грани норм матриц Теплица A, для которых $\mathfrak{A}$ служит ограниченным полем.

При доказательстве теорем используются две леммы — «нормализации» и «переползания». Из последней леммы вытекает известная в теории матриц Теплица теорема Мазура — Орлича.

В заметке имеются неточности в отдельных формулировках. *М. П. Щеглов*

1243. Относительные нормы матриц Теплица. Брудно А. Л., Докл. АН СССР, 1953, 91, № 2, 197—200

Реферируемая работа примыкает к предыдущей работе автора (см. реф. 1242). Воспользуемся здесь понятиями и обозначениями, принятыми в указанном реферате. Дополнительно автор вводит следующие новые определения:

Пусть A и B — матрицы Теплица, x — ограниченная последовательность действительных чисел. Нормой B относительно A называется функция $N_A^B(\delta) = \sup \|B(x)\|$, где верхняя грань берется по всем последовательностям x, для которых $\|x\| \leqslant 1$ и $\|A(x)\| \leqslant \delta$; вводится норма-функция $f = f(\delta)$.

Рассматриваются две задачи:

1. Изучить $N_A^B(\delta)$, как функцию δ.

2. Оценить максимально возможную величину, $|B^m(x)|$, если $|x| \leqslant 1$ и $|A(x)|_n^\infty \equiv \sup |A^k(x)| \leqslant \delta$ где верхняя грань берется по всем значениям $k \geqslant n$.

Формулируются следующие теоремы:

Теорема 1. Для фиксированных матриц A, B и числа $\delta \geqslant 0$ найдется последовательность x, для которой $\|x\| \leqslant 1$, $\|A(x)\| \leqslant \delta$, $\|B(x)\| = N_A^B(\delta)$. Если $0 \leqslant \delta \leqslant \|A\|$, то последовательность x можно выбрать так, чтобы, кроме того, $\|A(x)\| = \delta$.

Теорема 2. Норма B относительно A есть норма-функция, причем $N_A^B(\delta) = \|B\|$ при всех $\delta \geqslant \|A\|$. Обратно: если $N(\delta)$ — норма-функция и $N(\delta) = N(\delta_0)$ при всех $\delta \geqslant \delta_0$, то найдутся матрицы B и A такие, что $\|A\| = \delta_0$, $N_A^B(\delta_0) = \|B\|$ и $N_A^B(\delta) \equiv N(\delta)$.

Теорема 3 (основная). Пусть фиксированы матрицы A и B. Тогда

$$|B^m(x)| \leqslant N_A^B(\delta) + M_A^B(m, n),$$

если $|x| \leqslant 1$ и $|A(x)|_n^\infty \leqslant \delta$, где $M_A^B(m, n)$ не зависит ни от x, ни от δ и $M_A^B(m, n) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Полученные результаты прилагаются к построению матрицы более сильной, чем счетное число заданных. Приводятся примеры. *М. П. Щеглов*

1244. Об одной односторонней тауберовой теореме. Вторая заметка. Раджагопал (On a one-sided Tauberian theorem. A further note. Rajagopal C. T.), J. Indian Math. Soc., 1953, 17, № 1, 33—42 (англ.)

Рассматривается общий регулярный метод суммирования вида

$$\Phi(t) = \int_0^\infty \varphi(ut)\, a(u)\, du, \tag{1}$$

где $\varphi(u)$ при $u \geqslant 0$ положительна, дважды дифференцируема; $\varphi'(u) < 0$; $\varphi(0) = 1$;

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{u}\, du < \infty \quad (\varepsilon > 0),$$

и устанавливается следующая тауберова теорема:

Если вещественная функция $a(u)$ удовлетворяет условиям

$$a(u)\, u \log\log u \geqslant -W, \quad W > 0 \quad (u \geqslant 3);$$

$$a(u) = 0 \quad (u < 3), \tag{2}$$

и интеграл (1) существует при $t > 0$, причем $\Phi(t) \leqslant M$, то

$$\overline{\lim_{h\to\infty}} \int_0^h a(u)\, du \leqslant M + W. \tag{3}$$

Для абелева суммирования ($\varphi(u) = e^{-u}$) этот результат был установлен Пеннингтоном (Pennington W. B., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, № 4, 557—565), который, кроме того, показал, что неравенство (3) в этом случае не может быть усилено. Автор далее показывает, что из $\Phi(t) \to -\infty$ $(t \to +0)$ при выполнении всех прочих условий теоремы следует

$$\int_0^h a(u)\,du \to -\infty \quad (h \to \infty);$$

для $\varphi(u) = e^{-u}$ это было установлено Виджайярагаваном (Vijayaraghavan T., J. London Math. Soc., 1927, **2**, 215—222). Затем автор переносит свою теорему на методы суммирования рядов

$$\Phi_\lambda(t) = \sum_1^\infty a_n \varphi(\lambda_n t), \quad t > 0,$$

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \to \infty, \quad \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \to 1,$$

где $\varphi(u)$ удовлетворяет обычным условиям регулярности; при этом тауберово условие (2) заменяется следующим:

$$a_n \geqslant -W \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n \log\log \lambda_n}, \quad W > 0 \quad (\lambda_n \geqslant 3).$$

Б. И. Коренблюм

1245. Об одной рекуррентной формуле и некоторых тауберовых теоремах. Брёйн, Эрдёш (On a recursion formula and on some Tauberian theorems. Bruijn N. G. de, Erdös P.), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1953, **50**, № 3, 161—164 (англ.)

Пусть $c_n \geqslant 0$, $\sum_1^\infty c_n = 1$; определим $f(n)$ по формуле

$$f(1) = 1, \quad f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k f(n-k) \quad (n > 1). \qquad (1)$$

Устанавливается ряд теорем, связывающих асимптотические свойства последовательностей $\{c_n\}$ и $\{f(n)\}$. Формула (1) имеет приложения во многих разделах теории вероятностей (цепи Маркова, рекуррентные события и др.); автор, однако, исследует (1) независимо от этих приложений.

Обозначим $r_n = \sum_{k \geqslant n} c_k$, $s(y) = \sum_{n \leqslant y} r_n$, $S(y) = \sum_{n \leqslant y} f(n)$. Доказывается, что если для каждого $p > 0$

$$\lim_{y \to \infty} \frac{s(py)}{s(y)} = p^\alpha, \qquad (2)$$

где α не зависит от p, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, то при $y \to \infty$

$$s(y)\,S(y) = \frac{y}{\Gamma(2-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha)} + o(y). \qquad (3)$$

Если, кроме того, $c_{n-1} c_{n+1} > c_n^2$, то $f(n-1) f(n+1) > [f(n)]^2$ и вместо (3) можно написать

$$f(n) = \frac{1-\alpha}{s(n)\,\Gamma(2-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha)} + o\left(\frac{1}{s(n)}\right).$$

В частном случае, когда сходится ряд $\sum_1^\infty r_n = \sum_1^\infty n c_n = A < \infty$, условие (2) тривиально выполняется с $\alpha = 0$, и теорема автора дает $\sum_1^n f(k)/n \to A^{-1}$ — результат, принадлежащий А. Н. Колмогорову (Бюлл. Моск. Гос. ун-та, сек. А, 1937, **1**, № 3, 1—15). Как известно, в этом случае справедливо более сильное соотношение $f(n) \to A^{-1}$, если только общий наибольший делитель всех n, для которых $c_n > 0$, равен единице (см. цитированную работу А. Н. Колмогорова, а также Erdös P., Feller W., Pollard H., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 201—204).

Доказательство утверждения (3) основано на рассмотрении степенных рядов $F(x) = \sum_1^\infty f(n) x^n$, $R(x) = \sum_1^\infty r_n x^n$, связанных в силу (1) соотношением $F(x)\,R(x) = x^2/(1-x)$ $(|x| < 1)$. Это позволяет получить асимптотическое равенство, связывающее $F(e^{-t})$ и $s(t^{-1})$ при $t \to 0+$. Затем применяется одна тауберова теорема Карамата (Karamata J., J. reine und angew. Math., 1931, **164**, 27—39), относящаяся к интегралам Лапласа. Далее автор, уточняя результат Феллера (Feller W., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, **67**, 98—119, теорема 9), показывает, что, если общий наибольший делитель всех n, для которых $c_n > 0$, равен 1, то из $\sum_1^\infty n^2 c_n = \infty$ следует

$$\sum_1^\infty [f(n) - A^{-1}] = \infty$$

(Феллер доказал, что из сходимости первого ряда следует сходимость второго). *Б. И. Коренблюм*

1246. Применение формулы суммирования по частям к суммированию рядов. Форт (Application of the summation by parts formula to summability of series. Fort Tomlinson), Math. Mag., 1953, **26**, № 4, 199—204 (англ.)

Используя известное преобразование Абеля, автор устанавливает следующие две элементарные теоремы относительно суммируемости $(C, 1)$:

Теорема I. Если (а) $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$;

(б) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i\,|\Delta\varepsilon_i| = 0$, где $\Delta\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$;

(в) $\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i\right| < H,\ n = 1, 2, \ldots,$

то $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i s_i = 0.$

Теорема II. Если (а) $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_{n+1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i = s;$

(б) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i = 0;$ (в) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i\,|\triangle\varepsilon_i| < K,$

то $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i s_i = s.$

Пусть $\|c_{nk}\|$ и $\|b_{nk}\|$ — треугольные матрицы, для которых имеет место

$$\sum_{k=1}^{n} c_{nk}s_k = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\tau_k b_{nk} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема III. Если (а) $\lim_{n\to\infty} b_{n,\,n+1} = 0;$

(б) $\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}\tau_i\right| < H;$ (в) $\lim_{n\to\infty} n\triangle b_{n,\,n+1} = 0;$

(г) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} i\triangle^2 b_{ni} = 0,$ то $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c_{ni}s_i = 0.$

Теорема IV. Если (а) последовательность $\{\varepsilon_n\}$ сходится; (б) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_j$ существует; (в) $i\triangle\varepsilon_{i+1}$ и $j\triangle^2\varepsilon_j$ определяют регулярные методы суммирования, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i$ суммируем методом $(C, 1)$.

Без доказательства приводится подобного типа теорема для метода $(C, 3)$. *М. Д. Калашников*

1247. Об обобщенной показательной функции. Микусинский (On generalized exponential functions. G.-Mikusiński J.), Studia math., 1953, **13**, № 1, 48—50 (англ.)

На основании результатов своей более ранней статьи (Studia math., 1951, **12**, 181—190), посвященной рядам по нецелым степеням, автор получает теорему:

Если последовательность $\{\beta_\nu\}$ удовлетворяет условиям

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_\nu} = \infty,$ б) $\beta_{\nu+1} - \beta_\nu > \varepsilon > 0$ $(\beta_0 = 0),$

то ряд

$$f(x) = 1 - \alpha_1 x^{\beta_1} + \alpha_2 x^{\beta_2} - \ldots,$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{e}\prod_{\nu=1}^{\infty}{}' \frac{\beta_\nu}{|\beta_\nu - \beta_n|}\exp\left(-\frac{\beta_n}{\beta_\nu}\right),$$

сходится для всех $x \geqslant 0$ и его сумма является на отрезке $(0, \infty)$ монотонно убывающей функцией $(f(0) = 1,\ f(\infty) = 0)$. Кроме того,

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} f(x)\,dx = \frac{1}{p}\prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\beta_\nu}{\beta_\nu + p}\exp\left(\frac{p}{\beta_\nu}\right) \quad (p > 0).$$

М. А. Евграфов

См. также: 1018 **РЕЦ**, 1020 **РЕЦ**, 1051, 1052, 1069 **РЕЦ**, 1070, 1127, 1135, 1139 **РЕЦ**, 1152, 1153, 1178, 1217 **РЕЦ**, 1254, 1260 **РЕЦ**, 1264, 1278, 1390, 1420, 1427 **РЕЦ**

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

248. Интегрирование в абстрактных пространствах. Хилдебрандт (Integration in abstract spaces. Hildebrandt T. H.), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 2, 111—139 (англ.)

Обзорная статья, излагающая различные схемы абстрактного интегрирования и связи между ними.

Описываются конструкции интегралов от функций со значениями в нормированном пространстве R: римановского типа — Грейвса (1927); стилтьесовского типа — Данфорда (интегрируемая функция в R, 1938) и Вандерлейна (интегрирующая функция в R, 1941); лебеговского типа — Бохнера (1935), Данфорда (1935), Биркгофа (1935); билинейные интегралы (интегрируемая в R_1, интегрирующая в R_2) — Гавурина (1936) и Прайса (1936); интегралы, существующие в «слабом» смысле — Гельфанда (1936) [работа И. М. Гельфанда об абстрактных функциях (1938) не упоминается.— *Прим. реф.*] и Петтиса (1938); интегралы от функций со значениями в линейном топологическом пространстве — Филлипса (1940) и Рикарта (1944).

Схемы, основанные на соотношениях порядка: исходная конструкция Даниэлла (1917), ее обобщение Банахом (1937), затем Стоуном (1948) для вещественных функций; конструкция Биркгофа (1940), далее Орихары и др. для функций со значениями в полуупорядоченном пространстве. Описывается также схема Каратеодори (1938) и его последователей для интегрирования в пространствах «без точек».

Библиография 65 названий. *Г. Е. Шилов*

1249. О некоторых теоремах С. Сакса. Алексевич (On some theorems of S. Saks. Alexiewicz A.), Studia math., 1953, **13**, № 1, 18—29 (англ.)

Пусть X и Y — два пространства типа (F) (см. Банах С. С., Курс функціонального аналізу, Изд-во Радянська школа, Київ, 1948, 30), T — абстрактное множество, в котором задано σ-кольцо измеримых множеств со счетно-аддитивной конечной мерой, причем само T измеримо. Рассматривается операция $U(x, t)$, заданная для всех пар (x, t), где $x \in X$, $t \in T$, со значениями в Y, удовлетворяющая следующим условиям:

а) $U(x_1 + x_2, t) = U(x_1, t) + U(x_2, t)$ почти всюду в T,

б) если $x_n \to 0$, то и $|U(x_n, t)| \to 0$ по мере,

в) если G — открытое множество в Y, то при любом $x \in X$ множество $E_t\{U(x, t) \in G\}$ измеримо.

Доказывается следующая теорема: Пусть задано линейное измеримое (B) множество $R \subset Y$. Тогда существуют разбиение множества T на два измеримых множества A и B и множество $Z \subset X$, являющееся дополнением к множеству 1-й категории, такие, что:

1) для каждого $x \in X$ $U(x, t) \in R$ почти всюду в A,

2) для каждого $x \in Z$ $U(x, t) \notin R$ почти всюду в B.

Из этой теоремы выводится ряд следствий, относящихся к последовательностям линейных операций, преобразующих пространство X типа (F) в пространство S вещественных измеримых функций на множестве T. Именно, устанавливается возможность разбиения T на два измеримых множества так, что на одном из них последовательность операций при любом $x \in X$ обладает некоторым заданным свойством (например, сходится почти всюду), а на другом не обладает этим свойством при всех $x \in X$, за исключением некоторого множества 1-й категории. В частности, получаются результаты Сакса (Saks S., Trans. Amer. Math. Soc., 1932, **33**, 549—556). Аналогичные следствия выводятся для операции из X в S, зависящей от непрерывного параметра. *Б. З. Вулих*

1250. К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов. Бирман М. Ш., Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 2, 189—191

Дополняются некоторые результаты М. Г. Крейна (Мат. сб., 1947, **20(62)**: 3, 431—495) и М. И. Вишика (Тр. Моск. мат. о-ва, 1952, **1**, 187—246).

Пусть H — абстрактное гильбертово пространство, A — симметрический оператор с плотной в H областью определения $D(A)$ и $\widetilde{A}$ — произвольное самосопряженное расширение оператора A. Если оператор A обладает вещественной регулярной точкой, например $\lambda = 0$ (т. е. допускает ограниченное обращение), то для $D(A^*)$ и $D(\widetilde{A})$ имеют место формулы, из которых первая имеет вид:

$$D(A^*) = D(A) \dotplus A_0^{-1}U \dotplus U,$$

где U — нулевое подпространство оператора A^*, а A_0 — фиксированное самосопряженное расширение оператора A, сохраняющее регулярность точки $\lambda = 0$.

Если, в частности, нижняя грань $m(A) = \beta$ оператора A положительна, то в качестве A_0 можно взять любое самосопряженное расширение оператора A, удовлетворяющее условию $0 < \alpha \leqslant m(A_0) \leqslant \beta$, а все такие расширения, как показано М. Г. Крейном, удовлетворяют неравенству $A_\mu^{-1} \leqslant A_0^{-1} \leqslant A_\nu^{-1}$ (где $m(A_\mu) = \beta$ и, вообще говоря, $A_\mu \neq A_\nu$ при $\alpha = \beta$). Расширение A_μ называется жестким.

В заметке положено $A_0 = A_\mu$, после чего исследуется другая из упомянутых формул, имеющая вид

$$D(\widetilde{A}) = D(A) \dotplus (A_\mu^{-1} + \widetilde{B})\widetilde{U}_1 + U_2, \qquad (1)$$

где $U_1 \perp U_2$, $U_1 \oplus U_2 = U$ и $\widetilde{B}$ — самосопряженный оператор, действующий в U_1 с плотной в U_1 областью определения $D(\widetilde{B}) = \widetilde{U}_1$. Исследование состоит в нахождении необходимых и достаточных ограничений на выбор $\widetilde{B}$ (и выбор разбиения $U = U_1 \oplus U_2$), при котором расширение $\widetilde{A}$ будет обладать заданными спектральными свойствами.

Пусть $\widetilde{B}^{-1}$ — обращение $\widetilde{B}$ (или, если нулевое подпространство $\widetilde{B}$ непусто,— обращение части $\widetilde{B}$, индуцируемой в ортогональном дополнении нулевого подпространства до U_1), доопределенное на U_2 нулем. Устанавливается, что неравенство $m(\widetilde{A}) \geqslant \alpha$ эквивалентно неравенству $\widetilde{B}^{-1} \geqslant \alpha E + \alpha^2(A_\mu - \alpha E)^{-1}$, в частности, неравенства $m(\widetilde{A}) \geqslant 0$ и $m(\widetilde{A}) > 0$ эквивалентны, соответственно, неравенствам $m(\widetilde{B}^{-1}) \geqslant 0$ и $m(\widetilde{B}^{-1}) > 0$, полуограниченность снизу и дискретность отрицательной части спектра оператора $\widetilde{A}$ эквивалентна тем же свойствам спектра оператора $\widetilde{B}^{-1}$ (если при этом один из операторов $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}^{-1}$ имеет конечное число отрицательных собственных значений, то таково же число отрицательных собственных значений другого оператора).

Далее рассматривается обобщение формулы (1) на случай некоторых несамосопряженных симметрических расширений $\widetilde{A}$ оператора A и дается конструкция последующих расширений оператора $\widetilde{A}$ до самосопряженного оператора $\widetilde{\widetilde{A}}$. Устанавливается, что область определения замкнутого симметрического расширения A с положительной нижней гранью также определяется формулой вида (1), где слагаемое U_2 опущено, а $\widetilde{B}$ есть симметрический оператор в U с неплотной областью определения $D(\widetilde{B}) = U_1$, удовлетворяющий условию

$$(\widetilde{B}f, \widetilde{B}f) \leqslant \gamma(\widetilde{B}f, f) \quad (\gamma > 0).$$

Для получения любого самосопряженного расширения $\widetilde{\widetilde{A}}$ оператора $\widetilde{A}$ следует разложить подпространство U_2 в ортогональную сумму $U_1' \oplus U_2'$ и, объединив U_1 с U_1' в сумму $U_{11} = U_1 \oplus U_1'$, расширить симметрический оператор $P\widetilde{B}$ (где P — оператор проектирования на $H \ominus U_2'$) до самосопряженного оператора $\widetilde{\widetilde{B}}$ в U_{11} с плотной в U_{11} областью определения и, наконец, заменить в (1) $\widetilde{A}$ на $\widetilde{\widetilde{A}}$, $\widetilde{B}$ на $\widetilde{\widetilde{B}}$, U_1 на $\widetilde{U}_{11} = D(\widetilde{\widetilde{B}})$ и U_2 на U_2'. В заключение дается способ получения жесткого расширения $\widetilde{\widetilde{A}}_\mu$ оператора $\widetilde{A}$.

Все результаты приведены без доказательств. *И. М. Глазман*

1251. Выпуклые тела и периодические гомеоморфизмы в гильбертовом пространстве. Кли (Convex bodies and periodic homeomorphisms

in Hilbert space. Klee Victor L., Jr.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 74, № 1, 10—43 (англ.)

Используя результаты В. Л. Шмульяна (Мат. сб., 1939, 5 (47): 2, 317—328) и Эберлина (Eberlein W. F., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1947, 33, 51—53) об эквивалентности следующих свойств банахова пространства: 1) рефлексивности; 2) слабой компактности единичной сферы; 3) непустоты пересечения любой последовательности вложенных друг в друга непустых ограниченных замкнутых выпуклых множеств, автор конструктивно устанавливает для нерефлексивных банаховых пространств $E'[l^p, L^p$, гомеоморфных нерефлексивным $l^1, L^1]$, гомеоморфизм η между E' и $E' \setminus Y$, где Y — произвольное слабо компактное (соответственно компактное) множество.

При помощи вспомогательного аппарата — параметрического семейства вложенных друг в друга звездообразных множеств — устанавливается более сильная теорема об изотопии, переводящей в η тождественное преобразование пространства E'.

В качестве следствий конструируются гомеоморфизм между сферой в E' $[l^p, L^p]$ и замыканием дополнения к ней, между гиперплоскостью и поверхностью сферы в E' $[l^p, L^p]$, между гильбертовым пространством H, $H \times [0,1]$, сферой в H и ее поверхностью, а также периодические гомеоморфизмы H и E' на себя без неподвижных точек или с некоторыми наперед заданными множествами неподвижных точек; получен ряд других результатов, ставится ряд новых проблем.

М. Л. Бродский

1252. Теплопроводность на произвольных римановых многообразиях. Спенсер (Heat conduction on arbitrary Riemannian manifolds. Spencer D. C.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, 39, № 4, 327—330 (англ.)

На произвольном ориентируемом римановом многообразии $M = M^n$ размерности n и класса C^∞ рассматривается гильбертово пространство A^p внешних дифференциальных p-форм φ, причем скалярное произведение определяется формулой $(\varphi, \psi) = \int_M \varphi \Lambda^* \psi$. В этом пространстве естественным образом вводятся оператор d внешнего дифференцирования, оператор $\delta = (-1)^{np+n+1} * d *$ и оператор Лапласа — Бельтрами Δ. Кроме того, исходя из скалярного произведения Дирихле $D(\varphi, \psi) = (d\varphi, d\psi) + (\delta\varphi, \delta\psi)$ и полагая $D_s(\varphi, \psi) = D(\varphi, \psi) + s(\varphi, \psi)$, $\Delta_s = \Delta + s$, $s > 0$, автор определяет оператор Грина G_s и оператор Неймана N_s. При этом N_s есть ограниченный неотрицательный эрмитов оператор с нормой, не превосходящей $1/s$. Если

$$N_s = \int_0^{1/s} \lambda \, dE_s(\lambda)$$

его спектральное представление, то при $t > 0$ формула

$$W_t = \int_0^{1/s} \exp[(\lambda s - 1)\, t / \lambda] \, dE_s(\lambda)$$

определяет полугруппу W_t, причем $\left(\Delta + \frac{\partial}{\partial t}\right) W_t = 0$.

Это означает, что при фиксированном $\alpha \in A^p$ $W_t \alpha$ — решение уравнения теплопроводности при начальном распределении α. Аналогичные рассуждения применимы к оператору Грина, причем соответствующая полугруппа V_t вообще отличается от W_t.

В заключение автор рассматривает свойства этих операторов при различных частных предположениях относительно многообразия M. Доказательства в основном отсутствуют.

М. А. Наймарк

1253. Унитарные представления вещественной унимодулярной группы (основные невырожденные серии). Гельфанд И. М., Граев М. И., Изв. АН СССР, сер. мат., 1953, 17, № 3, 189—248

В работе И. М. Гельфанда и референта (Тр. Мат. ин-та им. Стеклова, 1950, 36) были построены и подробно исследованы конкретные неприводимые унитарные представления комплексных классических групп; в дальнейшем референтом было показано (Докл. АН СССР, 1952, 84, № 5, 883—886), что этими представлениями исчерпываются с точностью до эквивалентности все неприводимые унитарные представления классических групп.

В данной статье ставится вопрос о построении неприводимых унитарных представлений вещественных полупростых групп Ли, причем подробно этот вопрос рассматривается для случая вещественной унимодулярной группы G. А именно, строятся так называемые основные серии неприводимых представлений этой группы, которыми, конечно, не исчерпываются все ее неприводимые унитарные представления. При этом здесь, по сравнению с комплексными группами, возникает ряд новых особенностей, хотя основной принцип построения представлений остается тем же, что и для комплексных групп.

Эти особенности проявляются в том, что вместо одной основной серии представлений комплексной группы имеется несколько основных серий вещественной группы. Причиной этих новых особенностей является то обстоятельство, что при переходе от группы K комплексных треугольных матриц к сопряженной группе $g_0^{-1} K g_0$ соответствующее транзитивное многообразие классов смежности вещественной группы G по ее подгруппе $G \cap K$, вообще говоря, изменяется. Это обстоятельство эквивалентно тому, что группа Z (определенная условиями $z_{pq} = 0$ при $p < q$, $z_{pp} = 1$) не образует транзитивного многообразия по отношению к преобразованиям $z \to z\overline{g}$ вещественной группы G.

Авторы строят те транзитивные многообразия, которые необходимы для построения основных серий. Эти многообразия Z_m зависят от индекса $m \leqslant \frac{n}{2}$ и состоят из всех матриц $z = \dot{z}x$, где $\dot{z}, x \in Z$, $\operatorname{Im} \dot{z}_{1,2} \neq 0$, $\operatorname{Im} \dot{z}_{3,4} \neq 0, \ldots,$ $\operatorname{Im} \dot{z}_{2m-1,2m} \neq 0$, а все остальные $z_{p,q}$, $p > q$, равны нулю; далее, $x_{12} = x_{34} = \ldots = x_{2m-1,2m} = 0$, а все остальные $x_{p,q}$, $p > q$, — произвольные вещественные числа.

Таким образом, параметрами, определяющими точку z многообразия Z_m являются комплексные числа

$z_1 = z_{1,2}$, $z_2 = z_{3,4}$, ..., $z_m = z_{2m-1,2m}$ и матрица x.

При $m < \frac{n}{2}$ Z_m есть транзитивное многообразие, при $m = \frac{n}{2}$ Z_m распадается на два транзитивных многообразия Z_m^+, Z_m^-, определяемых соответственно условиями

$$\prod_{p=1}^{m} \operatorname{Im} z_{2p-1,2p} > 0, \quad \prod_{p=1}^{m} \operatorname{Im} z_{2p-1,2p} < 0.$$

Основная серия, отвечающая многообразию Z_m, строится следующим образом: при $m < \frac{n}{2}$ пространство $\mathfrak{H}$ представления состоит из функций $f(z) = f(z_1, z_2, \ldots, z_m, x)$, $z \in Z_m$, аналитических относительно каждого из переменных z_k в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Im} z_k < 0$, $\operatorname{Im} z_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, и удовлетворяющих условию

$$\int |f(z)|^2 \prod_{p=1}^{m} |y_p|^{np-2} \prod_{p=1}^{m} dx_p\, dy_p\, d\mu(x),$$

$$z_p = x_p + iy_p,$$

где $d\mu(x)$ — инвариантная мера в группе всех матриц x. Оператор T_g представления задается формулой $T_g f(z) = f(z\bar{g})\,\alpha(z, g)$, где преобразование $z \to z\bar{g}$ определяется по формулам цитированной выше статьи И. М. Гельфанда и референта. Что касается $\alpha(z, g)$, то для ее нахождения следует воспользоваться разложением $xg = kx_1$, где k — клеточная «треугольная» матрица, первыми m «диагональными» элементами которой являются матрицы второго порядка $\begin{pmatrix} \alpha_p & \beta_p \\ \gamma_p & \delta_p \end{pmatrix}$, а остальными диагональными элементами — произвольные числа λ_p.

Тогда

$$\alpha(z, g) = \prod_{p=1}^{m} \left(\frac{\beta_p z_p + \delta_p}{\sqrt{|\alpha_p \delta_p - \beta_p \gamma_p|}} \right)^{-n_p} \times$$

$$\times \prod_{p=1}^{m+\tau-1} |\Lambda_p|^{i\rho_p} \prod_{p=m+1}^{m+\tau-1} (\operatorname{sign} \Lambda_p)^{\varepsilon_p} \times$$

$$\times \{ |\Lambda_2|^{r_1+r_2} |\Lambda_3|^{r_1+2r_2+r_3} \ldots$$

$$\ldots |\Lambda_{m+\tau}|^{r_1+2r_2+\ldots+2r_{m+\tau-1}+r_{m+\tau}} \}^{-1/2},$$

где $\tau = n - 2m$, $r_1 = \ldots = r_m = 2$, $r_{m+1} = \ldots = r_{m+\tau} = 1$, $\Lambda_p = \left| \begin{matrix} \alpha_p & \beta_p \\ \gamma_p & \delta_p \end{matrix} \right|$ при $p \leqslant m$, $\Lambda_p = \lambda_{p-m}$ при $p = m+1, \ldots, m+\tau$, а $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{m+\tau-1}$ — произвольные вещественные числа, которые вместе с числами $n_1, n_2, \ldots, n_m$ служат параметрами, определяющими данное представление. При $m = \frac{n}{2}$ пространство представления состоит из функций определенных только на Z_m^+ или только на Z_m^-, а во всем остальном представление строится точно по тем же формулам.

Появляющаяся здесь аналитичность по параметрам z_p объясняется тем обстоятельством, что условие инвариантности функции при бесконечно малых сдвигах из $g_0^{-1}Kg_0$, вообще говоря, не приводит к гиперболической системе дифференциальных уравнений, так что в случае вещественной группы постоянство на классах смежности по $g_0^{-1}Kg_0$ для некоторых параметров заменяется условием аналитичности.

Доказывается, что построенные представления неприводимы; идея доказательства та же, что и для случая комплексной группы, но ее проведение связано с некоторыми дополнительными трудностями.

Строится пример представления, не являющегося представлением описанных выше классов.

М. А. Наймарк

1254. О квазиперестановочных бесконечных матрицах. Ньютон (On quasi-commutable infinite matrices. Newton R. H. C.), Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., A,1953, 56, № 2, 120—130; Indagationes math., 1953, 15, № 3, 120—130 (англ.)

Как показал Дрейзин (Drazin M. P., Proc. London Math. Soc., 1951, 1, 222—231), многие результаты, имеющие место для конечных перестановочных матриц, остаются справедливыми для более общего случая квазиперестановочных матриц. При этом матрицы A, B называются квазиперестановочными, если при некотором натуральном r одна из матриц $C^{(1)} = AB - BA$, $C^{(r)} = AC^{(r-1)} - C^{(r-2)}A$, $r = 2, 3, \ldots$, обращается в нуль. Минимальное число r, для которого это имеет место, называется индексом квазиперестановочности, а A, B называются r-перестановочными.

В данной статье аналогичные результаты получаются для бесконечных матриц; наиболее существенные из них следующие:

1) Если A, B — r-перестановочные матрицы, принадлежащие одному и тому же ассоциативному полю F (по поводу терминологии см. Cooke R. G., Infinite matrices and sequence spaces, Macmillan, London, 1950), и если A — диагональная матрица с различными диагональными элементами, то $r = 1$.

2) Если Ω, ${}^{-1}\Omega = \Omega^{-1}$, D, B' принадлежат одному и тому же ассоциативному полю F, причем D — диагональная матрица с различными диагональными элементами, и если $\Omega^{-1}B'\Omega$ r-перестановочна с $\Omega^{-1}D\Omega$, то $r = 1$.

3) Если $C^{(r)} = 0$, то вообще $C^{(r-1)} \neq 0$ и притом даже для T-матриц A, B.

Эти результаты применяются далее к теории обобщенных пределов. Если $A = (a_{nk})$ — некоторая T-матрица, то последовательность $\{z_n\}$ автор называет A-сходящейся, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} z_k$, а этот предел называет A-пределом и обозначает через $A\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} z_k$.

Основные результаты состоят в следующем:

1) Если T-матрицы A и B r-перестановочны, то соответствующие A, B-пределы для ограниченных последовательностей совпадают.

2) Если конечнострочные T-матрицы A, B r-перестановочны, то соответствующие A, B-пределы совпадают, если они существуют.

Пусть A^* — совокупность всех ограниченных последовательностей, для которых A-предел существует, и пусть A, B — T-матрицы.

3) Если $C^{(r)}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} z_k$ существует и равен l_r при некотором $r \geqslant 1$ и если $\{z_k\} \in A^*$, то существует l_k при всех k и $l_1 = l_2 = l_3 = \ldots$

4) Если существует ограниченная расходящаяся последовательность $\{z_k\}$ такая, что $C^{(r)}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$ при некотором $r \geqslant 1$, и если $\{z_k\} \in A^* \cap B^*$, то $A\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} z_k = B\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} z_k$ и $C^{(p)}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$ для всех $p = 1, 2, 3, \ldots$

5) Если T-матрицы таковы, что при некотором r $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left| c_{nk}^{(r)} \right| = 0$, то для любой ограниченной $\{z_k\}$:

(a) $C^{(r)}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$, $r = 1, 2, 3, \ldots$; (b) $A\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} z_k = B\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} z_k$, если $\{z_k\} \in A^* \cap B^*$.

Автор на примере показывает, что для неограниченных последовательностей из $C^{(r)}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$ вообще не следует $C^{(r-1)}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$. Кроме того, автор указывает, что ему не удалось решить вопроса о том, верно ли это утверждение для ограниченных последовательностей. *М. А. Наймарк*

1255. О группах бесконечных матриц. Аллен (On groups of infinite matrices. Allen H. S.), Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., **A**, 1953, 56, № 3, 223—230; Indagationes math., 1953, 15, № 3, 223—230 (англ.)

Рассматривается множество $\Sigma(\alpha)$ бесконечных матриц, отображающих на себя фиксированное совершенное пространство α числовых последовательностей, а в $\Sigma(\alpha)$ — совокупность $G(\alpha)$ всех матриц, имеющих двухстороннюю обратную матрицу; известно, что $\Sigma(\alpha)$ — алгебра, а $G(\alpha)$ — группа относительно обычных действий с матрицами (пространство α числовых последовательностей называется совершенным, если $\alpha = \alpha^{**}$, где α^* — так называемое дуальное к α пространство, т. е. пространство всех последовательностей $\{u_n\}$ таких, что при любом $\{x_n\} \in \alpha$ ряд $\Sigma x_n u_n$ сходится абсолютно).

Автор обозначает через $h(\beta)$ подгруппу всех тех матриц из $G(\alpha)$, которые отображают в себя фиксированное подпространство $\beta \subset \alpha$, а через $g(\beta)$ — подгруппу всех тех матриц из $G(\alpha)$, которые оставляют на месте каждый элемент в β. Оказывается, что 1) $h(\beta) = G(\alpha)$ тогда и только тогда, когда $\beta = \{0\}$ или $\beta = \alpha$; 2) если β и λ — собственные подпространства в α, то из $h(\beta) = h(\lambda)$ следует $\beta = \lambda$; 3) всякая матрица C, перестановочная со всеми матрицами из $g(\beta)$, $\beta \neq \{0\}$, кратна единичной матрице.

Пусть $\overline{\beta}$ — множество всех точек $u = \{u_k\}$ дуального пространства α^* таких, что $\Sigma u_i x_i = 0$ для всех $\{x_k\} \in \beta$; аналогично определяется $\overline{\overline{\beta}}$. Если $\overline{\overline{\beta}} = \beta$, то β называется ортогонально замкнутым.

В случае ортогонально замкнутых β и λ: 1) из $A \in G(\alpha)$, $A\beta = \lambda$ следует $A'\overline{\lambda} = \beta$; 2) из $\lambda = \{0\}$, $\lambda \neq \alpha$, $h(\lambda) \supseteq h(\beta)$ следует $\beta = \lambda$; 3) нормализатор $g(\beta)$ в $G(\alpha)$ есть $h(\beta)$. Эти результаты дают возможность определить максимальную абелеву подгруппу группы $G(\alpha)$.

Отметим еще следующие результаты, относящиеся к случаю совершенного полного нормированного пространства (пространства Кёте—Банаха): 1) если β — замкнутое подпространство в сепарабельном пространстве Кёте—Банаха α, то $g(\beta) \bigcap g'(\overline{\beta})$ есть подгруппа главной компоненты группы $G(\alpha)$; 2) если, кроме того, существует оператор проектирования на β, а λ — соответствующее дополнительное подпространство к β, то $h(\beta)\, h(\lambda) = g(\beta)\, g(\lambda)$. При этом $g'(\overline{\beta})$ обозначает совокупность всех матриц, транспонированных к матрицам из $g(\overline{\beta})$. *М. А. Наймарк*

1256. Интегральные представления положительно определенных функций. Девинац (Integral representations of positive definite functions. Devinatz A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **74**, № 1, 56—77 (англ.)

Через E_p обозначается p-мерное евклидово пространство. Если $x, \xi \in E_p$, то $x\xi$ обозначает скалярное произведение векторов x, ξ. Пусть $f(z) = f(x, y)$ — непрерывная функция, определенная на топологическом произведении $D_c \times E_n$ пространства E_n ($y \in E_n$) и некоторой области D_c из E_m, состоящей из всех точек $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})$ таких, что $x^{(j)} > c^{(j)}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), где $0 > c^{(j)} > -\infty$ для всех $c^{(j)}$.

Методами спектральной теории операторов в гильбертовом пространстве доказывается, что такая функция допускает представление

$$f(z) = \int e^{x\xi + iy\eta} dV(\xi, \eta), \qquad (1)$$

где V — ограниченная неотрицательная абсолютно аддитивная функция борелевских множеств топологического произведения $E_{m+n} = E_m \times E_n$ и интеграл берется по всему E_{m+n} в том и только в том случае, когда при любых $z_j = (x_j, y_j) \in D_c \times E_n$ ($j = 1, 2, \ldots, N$; $N = 1, 2, \ldots$) и любых комплексных α_j ($j = 1, 2, \ldots, N$)

$$\sum_{j,k=1}^{N} f(x_j + x_k, y_j - y_k)\, \alpha_j \overline{\alpha_k} \geqslant 0. \qquad (2)$$

Функция множеств V (при соответствующей ее нормировке), входящая в представление (1) функции $f(z)$, определяется единственным образом.

При $m = 0$ теорема автора переходит в теорему С. Бохнера о положительно определенных функциях, а при $n = 0$ — в теорему С. Н. Бернштейна об интегральном представлении экспоненциально конвексных функций.

Автор отмечает, что при $m = n = 1$ его теорема противоречит одному результату М. С. Лившица (Докл. АН СССР, 1943, **44**, № 1, 1—7). Последний,

рассматривая непрерывные функции $f(z) = f(x, y)$, определенные в какой-либо выпуклой области K комплексной плоскости с центром симметрии в начале координат, утверждал, что при выполнении условия (2) для любых $z_j = x_j + iy_j$ ($j=1, 2,\ldots N$; $N = 1, 2,\ldots,$) таких, что $2z_j \in K$ ($j = 1, 2,\ldots, N$), функция $f(z)$ допускает представление (1), в котором весь спектр функции V расположен на биссектрисе $\xi = \eta$. В действительности утверждение М. С. Лившица и его доказательство верны лишь при дополнительном требовании голоморфности функции $f(z)$ в области K.

Полная формулировка основной теоремы автора содержит также необходимые и достаточные условия того, чтобы в представлении (1) весь спектр функции V был расположен в «гиперпараллелепипеде» $a^{(j)} \leqslant \xi^{(j)} \leqslant b^{(j)}$ ($j=1, 2,\ldots,m$), $-d^{(k)} \leqslant \eta^{(k)} \leqslant d^{(k)}$ ($k = 1, 2,\ldots, n$), где $-\infty \leqslant a^{(j)} \leqslant b^{(j)} \leqslant \infty$, $0 \leqslant d^{(k)} \leqslant \infty$.

Приводится, кроме того, дискретный аналог основной теоремы, относящийся к функциям $f(x, y)$, аргументы x и y которых суть соответственно m-мерные и n-мерные векторы с целочисленными координатами, причем координаты вектора x неотрицательны.

В начале статьи устанавливается ряд вспомогательных предложений относительно гильбертовых пространств, порождаемых положительно определенными ядрами $K(p, q)$, заданными на квадрате $Q \times Q$ какого-либо абстрактного множества. Эти результаты примыкают к исследованиям Аронсзейна (Aronszajn N., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, 68, № 3, 337—404) и М. Г. Крейна (Крейн М. Г., Украинский мат. ж,. 1949, 1, № 4, 64—98; 1950, 2, № 1, 10—59), статьи которого, повидимому, остались неизвестными автору. *М. Г. Крейн*

1257. К спектральной теории матриц в аналитическом пространстве. Х а п л а н о в М. Г., Докл. АН СССР, 1953, 90, № 6, 969—972

Реферируемая статья, как и две предыдущие работы автора (Докл. АН СССР, 1951, 79, № 6, 929—932; 80, № 1, 21—24), посвящена изучению базисов в пространстве аналитических в некотором круге функций. Каждой такой функции $f(z) = x_1 + x_2 z + \ldots + x_n z^{n-1} + \ldots$ сопоставляется числовая последовательность $x(x_1, x_2,\ldots)$. Понятие предела в пространстве последовательностей, называемом аналитическим пространством, вводится при помощи линейных форм $xu = x_1u_1 + x_2y_2 + \ldots$, сходящихся для любой точки x пространства (см. Köthe G., Töplitz O., J. reine und angew. Math., 1934, 171, 193). Изучение базисов в пространстве аналитических функций связывается с рассмотрением систем линейных уравнений в аналитических пространствах (такой путь был рекомендован М. В. Келдышем).

В первой статье автора рассматривались общие свойства аналитических пространств, во второй — линейные преобразования этих пространств, заданные бесконечными матрицами. В реферируемой работе используются полученные ранее результаты для установления ряда достаточных признаков базиса в пространстве аналитических функций.

Вначале исследуются линейные интегральные уравнения

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_{(C)} K(x, s)\, \varphi(s)\, ds, \qquad (1)$$

ядра которых непрерывны по совокупности переменных и аналитичны по x в некоторой области G при каждом $s \in C$, C — спрямляемая жорданова кривая. При этом рассматриваются два случая: когда C лежит внутри G и когда C — часть границы G. Пусть λ не есть собственное число интегрального уравнения (1); тогда, как показывает автор, последовательность функций

$$\{g_n(x) - \lambda \int\limits_{(C)} K(x, s)\, g_n(s)\, ds\}$$

образует в соответствующем пространстве аналитических функций полную систему (нормальный базис), если последовательность $\{g_n(x)\}$ образует полную систему (нормальный базис).

Достаточные признаки базиса даются для последовательностей функций вида $\{x^n - \lambda f_n(x)\}$, в основном, в терминах, относящихся к матрице последовательности $\{f_n(x)\}$. В качестве примера результатов автора приведем теорему 5:

Пусть матрица последовательности аналитических в круге $|x| < R$ функций $\{f_n(x)\}$ преобразует A_R в $\bar{A}_R$. Тогда для всех λ, кроме собственных значений уравнения (1) с ядром

$$K(x, s) = (1/2\pi i) \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)\, /s^{j+1},$$

и кривой C, являющейся окружностью $|s| = R$, последовательность $\{x^n - \lambda f_n(x)\}$ образует базис в пространстве функций, аналитических внутри $|x| < R$ и непрерывных в $|x| \leqslant R$.

Через $A_R(\bar{A}_R)$ обозначается аналитическое пространство последовательностей, соответствующих функциям, аналитическим в $|x| < R$ (в $|x| \leqslant R$). *М. А. Красносельский*

1258. К вариационным методам в задаче о точках бифуркации. К р а с н о с е л ь с к и й М. А., П о в о л о ц к и й А. И., Докл. АН СССР, 1953, 91, № 1, 19—22

Число λ_0 авторы называют точкой бифуркации оператора A, оставляющего инвариантным нулевой элемент θ пространства, если произвольным положительным числам ε и δ соответствуют решения уравнения $A\varphi = \lambda\varphi$, удовлетворяющие условиям:

$$|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon,\ 0 < \|\varphi\| < \delta.$$

Сформулированы следующие утверждения:

Т е о р е м а 1. Пусть в гильбертовом пространстве H задан нелинейный вполне непрерывный потенциальный оператор $\Gamma(\Gamma\theta=\theta)$, который в нуле θ имеет производную Фреше B, являющуюся самосопряженным положительно определенным оператором. Пусть J — унитарный оператор, коммутирующий с B и такой, что оператор JB имеет конечное число положительных собственных чисел. Тогда наименьшее положительное собственное число оператора JB будет точкой бифуркации оператора $J\Gamma$ (при формулировке теоремы мы опустили некоторые лишние предположения авторов статьи).

Т е о р е м а 2. Если помимо условий теоремы 1 выполнено еще следующее условие: Γ есть градиент функционала $\Phi(\varphi)$, дифференцируемого с ограниченным остатком в некоторой окрестности U точки

θ, т. е. равномерно относительно $\varphi \in U$

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\Phi(\varphi + h) - \Phi(\varphi) - (\Gamma\varphi,\ h)}{\|h\|} = 0,$$

то каждое положительное собственное число оператора JB будет точкой бифуркации оператора $J\Gamma$.

Эти, а также другие сформулированные авторами теоремы о существовании собственных функций оператора $J\Gamma$ используются для некоторых предложений об уравнениях типа Гаммерштейна. Из этих предложений в виде примера приведем следующую теорему:

Теорема 7. Пусть симметрическое ядро $K(x, y)$ ограничено и имеет конечное число положительных собственных чисел. Пусть функция $f(x, u)$ удовлетворяет условию

$$f(x, u) \operatorname{sign} u > 0 \quad (x \in G,\ |u| < \alpha),$$

где α — некоторое положительное число. Тогда оператор

$$\int_G K(x, y) f(y, \varphi(y))\, dy \quad (\operatorname{mes} G < \infty)$$

имеет континуум собственных функций со сколь угодно малой верхней границей модуля. Отметим, что доказательство теорем 4, 5, 6 и 7 вытекает из работ референта (см. Мат. сб., 1950, **26** (**68**), 365—394; реф. 1222). *М. М. Вайнберг*

1259. Ограниченно-слабые топологии и полнота в векторных пространствах. Робертс (Bounded-weak topologies and completeness in vector spaces. Roberts G. T.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, ч. 2, 183—189 (англ.)

Рассматриваются векторные пространства, в которых вместо нормы указана совокупность множеств, называемых ограниченными, удовлетворяющая некоторым естественным аксиомам. Ограниченность в пространстве X позволяет выделить совокупность M линейных функционалов, переводящих ограниченные множества в ограниченные.

Полярой множества $S \subset X$ в M называется совокупность элементов f из M таких, что

$$|\langle f, S\rangle| \equiv \sup_{s \in S} |\langle f, s\rangle| \leqslant 1$$

($\langle f, s\rangle$ — значение функционала f для элемента s). Совокупность поляр всех ограниченных множеств из X можно принять за полную систему окрестностей нуля в M. Множество A из M называется ограниченным, если для любого слабо сходящегося к нулю фильтра F, состоящего из ограниченных множеств,

$$\sup_{f \in A} |\langle f, F\rangle| \to 0;$$

(фильтр — это частично упорядоченная по включению неограниченная совокупность множеств).

Если слабое замыкание каждого ограниченного множества в X ограниченно, то совокупность ограниченных множеств в M совпадает с совокупностью множеств, вполне ограниченных относительно введенной в M топологии. Отсюда вытекает, что при некоторых условиях пополнение M является объединением слабых замыканий вполне ограниченных множеств из M в пространстве всех линейных функционалов пространства X.

Некоторые понятия и утверждения автора близки к полученным референтом для топологических групп (Виленкин Н. Я., Изв. АН СССР, сер. мат., 1951, **15**, 439—462). *Н. Я. Виленкин*

1260 РЕЦ. Лекции по функциональному анализу. Рисс, Надь (Leçons d'analyse fonctionnelle. Riesz Frederic, Sz.-Nagy Béla, pp. VIII + 448, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1952, 7.70 doll.) [**Рецензии: Лорх** (Lorch E. R.), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 3, 270—281 (англ.); **Радон** (Radon J.), Monatsh. Math., 1953, **57**, 92—93 (нем.); (J. L. B. C.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 320, 157—158 (англ.)]

1261 РЕЦ. Конкретные проблемы функционального анализа. Леви (Les problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Lévy P., pp. 442, Paris, Gauthier-Villars, 1951) [**Рецензия: Полищук Е.**, Новые книги за рубежом, 1953, № 6, 41—45]

1262 РЕЦ. Теория «распределений». Шварц (Théorie des distributions. Schwartz Laurent, Paris, Hermann et Cie, Editeurs) [**Рецензия:** (J. G. T.), Gaz. mat., 1953, **14**, № 54, 17 (порт.)]

1263 Д. О двумерной проблеме моментов. Зархина Р. Б. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., МГУ, М., 1953

См. также: 1011, 1017 **РЕЦ**, 1087, 1134, 1139 **РЕЦ**, 1142, 1150, 1164, 1179, 1212, 1219 **Д**, 1222, 1231, 1264, 1277, 1404.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1264. Одно видоизменение неравенства Шварца и его приложения к распределениям вероятностей. Моригути (A modification of Schwarz's inequality with applications to distributions. Moriguti Sigeiti), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 1, 107—113 (англ.)

Пусть

$$M = \sup \frac{\int_a^b x(t)\, d\Phi(t)}{\left(\int_a^b x^2(t)\, dt\right)^{1/2}},$$

где $\Phi(t)$ — фиксированная функция с ограниченным изменением, непрерывная в точках a и b, и верхняя грань берется по всевозможным не убывающим на $[a, b]$ функциям $x(t)$. Пусть $\overline{\Phi}(t)$ — верхняя грань значений в точке t всех выпуклых функций, не превосходящих $\Phi(t)$ на всем отрезке $[a, b]$.

Так как $\overline{\Phi}(t)$ — непрерывная выпуклая функция, то почти всюду существует правосторонняя производная $\overline{\varphi}(t)$ функции $\overline{\Phi}(t)$. Показывается, что

$$M = \left(\int_a^b \overline{\varphi}^2(t)\, dt\right)^{1/2}.$$

Этот результат представляет собой уточнение обычного неравенства Коши—Буняковского (неправильно именуемого автором неравенством Шварца) для неубывающих $x(t)$.

При помощи описанной выше оценки находятся экстремумы различных величин, связанных с распределениями вероятностей, в классе распределений вероятностей с заданной дисперсией σ^2. Это делается, например, для математических ожиданий $M(X_j - X_i)$ и $MX_i - M$, где X_i — i-ый член вариационного ряда, составленного по n независимым наблюдениям случайной величины X с математическим ожиданием M. Приводится таблица для $\sup\{MX_{(n+1)/2} - M\}$ при $n = 3{,}5, \ldots, 19$. Оказывается, что в этом случае найденная оценка примерно вдвое точнее оценки, полученной при помощи обычного неравенства Коши—Буняковского.

Р. Л. Добрушин

1265. Доказательство обобщенной основной леммы С. Н. Бернштейна для сумм почти независимых величин, удовлетворяющих условию Линдеберга. М а р у ш и н М. Н., Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 1, 21—24

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — последовательность зависимых случайных величин; $Mx_j = 0$, $Dx_j = b_j$,

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} x_j;\ DS_n = B_n,\ B_n' = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Доказывается следующее предложение: если при произвольно заданных $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}$

$$M(x_j / x_1, \ldots, x_{j-1}) = a_j;$$
$$M((x_j - a_j)^2 / x_1, \ldots x_{j-1}) = b_j^* \quad \text{и при } n \to \infty$$

$$\frac{1}{B_n} M \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right)^2 \to 0,$$

$$\frac{1}{B_n} M \sum_{j=1}^{n} | b_j - b_j^* | \to 0,$$

$$\frac{1}{B_n'} \sum_{j=1}^{n} \int_{|x| > \tau \sqrt{B_n'}} x^2 \, dF_j(x) \to 0,$$

где τ — произвольное положительное число, то

$$P\left\{ \frac{S_n}{\sqrt{B_n}} < z \right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2} \, dx .$$

Доказанное предложение обобщает результаты С. Н. Бернштейна (Изв. АН СССР, сер. мат., 1940, **4**, № 2, 137—150) и О. В. Сарманова (Изв. АН СССР, сер. мат., 1947, **11**, № 6, 569 — 575). Более общие результаты были получены несколько раньше Лёве (Loeve M., J. math. pures et appl., 1945, **24**, 249—318; Etude asymptotique des sommes de variables aléatoires liées, Théses, Paris, 1946).

Б. В. Гнеденко

1266. О необходимых и достаточных условиях применимости предельной теоремы порядка $p<2$. М а р у ш и н М. Н., Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 5, 727—730

Приводится доказательство теоремы референта, сформулированной без доказательства в конце заметки «Несколько замечаний о предельной теореме Ляпунова» (Докл. АН СССР, 1939, **24**, № 1, 3—7).

Предельной теоремой порядка $p > 0$ для некоторой бесконечной последовательности случайных величин x_n (м. о. $x_n = 0$) называется утверждение о том, что

$$\lim_{n\to\infty} \text{вер}\,(x_n < t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-z^2/2} \, dz, \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \text{м. о.}\,|x_n|^p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |z|^p e^{-z^2/2} \, dz. \qquad (2)$$

В упомянутой заметке референта было доказано, что соответствующее классическое условие Ляпунова порядка $p > 2$ необходимо и достаточно, чтобы к нормированной сумме независимых случайных слагаемых была применима предельная теорема того же порядка $p > 2$. Там же было замечено, что в случае $p = 2$ соответствующее необходимое и достаточное условие превращается в известное условие Линдеберга. Теорема референта для $p < 2$, доказанная автором рассматриваемой статьи, является естественным дополнением к вышеупомянутым результатам.

С. Н. Бернштейн

1267. Об усиленных законах для некоторых типов событий, связанных с суммами независимых случайных величин. Л и п ш у ц (On strong laws for certain types of events connected with sums of independent random variables. L i p s c h u t z M i r i a m), Ann. Math., 1953, **57**, № 2, 318—320 (англ.)

Известная лемма Бореля — Кантелли утверждает, что если $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ — последовательность независимых событий и $\Sigma P(E_n) = \infty$, то с вероятностью единица наступает бесконечно много событий E_j. Автор использует работу Чжуна и Эрдёша (Chung K. L., Erdös P., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **72**, 179—186), где этот результат переносится на некоторые последовательности зависимых событий, и показывает, что одно из условий теоремы Чжуна — Эрдёша при довольно широких предположениях выполняется для последовательностей событий, связанных с суммами $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_n.

Этот результат прилагается к изучению скорости роста: а) числа N_n положительных значений среди $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (в случае, когда ξ_n имеют одну и ту же непрерывную и симметричную плотность вероятности и в некоторых других случаях); б) числа нулей среди $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (в случае, когда $\xi_n = \pm 1$ с вероятностью $1/2$).

Пусть $\varphi(n) \to 0$ при $n \to \infty$ и $\varphi(n) \geqslant \frac{1}{(\log n)^2}$

Доказывается, что для того, чтобы с вероятностью единица, начиная с некоторого n, выполнялось неравенство $N_n \geqslant n\varphi(n)$, необходимо и достаточно, чтобы интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\varphi(y)}{y} dy$ сходился. В случае

б) получается новое доказательство результатов Чжуна и Ханта (Chung K. L., Hunt G. A., Ann. Math., 1948, 50, 385). *Е. Б. Дынкин*

1268. Асимптотическое поведение биномиального распределения. Прохоров Ю. В., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 3 (55), 135—142

Производятся n независимых испытаний, в каждом из которых событие E имеет вероятность наступления p. Вводятся обозначения

$$B(x) = C_n^x p^x q^{n-x} \quad (q = 1-p); \quad a = np;$$

$$\Pi_1(x) = \frac{a^x}{x!} e^{-a}, \qquad \Pi_3(x) = \frac{(n-a)^x}{x!} e^{-(n-a)}$$

(при $x \geqslant 0$);

$$\Pi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-u^2/2}, \qquad \sigma = \sqrt{npq}, \; u = \frac{x-np}{\sigma};$$

$$\rho_k(p, n) = \sum |B(x) - \Pi_k(x)|, \quad k = 1, 2, 3;$$

$$\lambda_1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2}; \quad \lambda_2 = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}(1+4e^{-2/2});$$

$$\lambda = \sqrt[3]{\lambda_1 \lambda_2^2}; \quad p_1 = \lambda_1^{-2/3} \lambda_2^{2/3}.$$

Доказывается, что

1. $\rho_1(p, n) = \lambda_1 p + p\,O(\min(1, \sigma^{-1}\sqrt{q}))$,
$$\rho_2(p, n) = \frac{|q-p|}{\sigma}\lambda_2 + O(\sigma^{-2});$$

2. $\sup\limits_{0 \leqslant p \leqslant 1} \min\limits_k \rho_k(p, n) = \lambda n^{-1/3} + O(n^{-2/3})$;

3. $$\min \rho_k(p, n) = \begin{cases} \rho_1(p, n) \text{ при } p < p_1 n^{-1/3} + \\ + O(n^{-2/3}), \\ \rho_2(p, n) \text{ при } p_1 n^{-1/3} + \\ + O(n^{-2/3}) \leqslant p < 1 - p_1 n^{-1/3} + \\ + O(n^{-2/3}), \\ \rho_3(p, n) \text{ при } p \geqslant 1 - p_1 n^{-1/3} + \\ + O(n^{-2/3}). \end{cases}$$

Б. В. Гнеденко

1269. Поправки к моей статье «Флуктуации сумм независимых случайных величин». Чжун (Corrections to my paper «Fluctuations of sums of independent random variables». Chung K. L.), Ann. Math., 1953, 57, № 3, 604—605 (англ.)

Поправки к работе автора, опубликованной в Ann. Math., 1950, 51, 697—706.

1270. Об эргодическом принципе для неоднородных цепей Маркова. Сарымсаков Т. А., Докл. АН СССР, 1953, 90, № 1, 25—28

Пусть $\mathfrak{G}_1^{(s)}$ — совокупность всех стохастических матриц порядка s, примитивных в смысле В. И. Романовского. Множество $\mathfrak{G}_2^{(s)}$ определяется условием $A \in \mathfrak{G}_2^{(s)}$, если $A\mathfrak{G}_1^{(s)} \subset \mathfrak{G}_1^{(s)}$. Совокупность всех стохастических матриц порядка s, у которых хотя бы один столбец состоит из положительных элементов, обозначается через $\mathfrak{M}^{(s)}$.

Доказывается, что: 1) если $A \in \mathfrak{M}^{(s)}$ и B — любая стохастическая матрица, то $AB \in \mathfrak{M}^{(s)}$ и $BA \in \mathfrak{M}^{(s)}$; 2) существует ν, зависящее только от s, такое, что произведение любых $k \geqslant \nu$ матриц из $\mathfrak{G}_2^{(s)}$ принадлежит $\mathfrak{M}^{(s)}$.

Отсюда выводится, что если $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — последовательность матриц из $\mathfrak{G}_2^{(s)}$, причем все отличные от нуля элементы этих матриц ограничены снизу одной и той же положительной константой, то соответствующая неоднородная цепь Маркова подчиняется эргодическому принципу.

Е. Б. Дынкин

1271. Времена возвращения и первого прохождения. Бартлетт (Recurrence and first passage times. Bartlett M. S.), Proc. Cambridge Philos, Soc., 1953, 49, ч. 2, 263—275 (англ.)

Сводка методов и формул, частично новых, частично уже опубликованных. Рассматриваются процессы рекуррентного типа, в которых наступление некоторого события S возобновляет начальные условия развития процесса (см. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., 1952, гл. 12).

Пусть S_t обозначает наступление события S в момент t (в другой терминологии — событие: «система находится в момент t в состоянии S»).

Исследуются три схемы: А) время t дискретно, вероятности $p(t) = P(S_t|S_0)$ не равны тождественно нулю; Б) время t непрерывно, условия на вероятности $p(t)$ такие же, как и в случае А); В) время t непрерывно, вероятность наступления S в промежутке $[t, t+\Delta t]$ при условии S_0 равна $\varphi(t)\Delta t + o(\Delta t)$.

В случаях А) и В) ищется распределение вероятностей для наименьшего положительного значения t, при котором наступает S (при условии S_0). В случае Б) ищется распределение для промежутка времени от выхода из S до первого возвращения в S. Для всех случаев исследуется также минимальное время, в течение которого происходит переход из состояния S в состояние T («время первого прохождения»). Основную роль играет метод производящих функций (в непрерывном случае — преобразование Лапласа).

Рассматривается поведение $p(t)$ и $\varphi(t)$ при $t \to \infty$ (эргодические свойства). Излагается основанный на эргодическом принципе метод Смолуховского для вычисления среднего времени возвращения для стационарных процессов (требование рекуррентности при этом отбрасывается). Даются приложения к марковским процессам.

Е. Б. Дынкин

1272. О дифференциальных уравнениях для переходных вероятностей марковских процессов со счетным числом состояний. Рёйтер, Ледерман (On the differential equations for the transition probabilities of Markov processes with enumerably many states. Reuter G. E. H., Lederman W.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, 49, ч. 2, 247—262 (англ.)

Рассматриваются дифференциальные уравнения Колмогорова для переходных вероятностей $p_{ik}(s, t)$

$(i, k = 1, 2, \ldots; s \leqslant t)$ марковского процесса со счетным числом состояний

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ik}(s, t) = \sum_j p_{ij}(s, t)\, a_{jk}(t),$$

$$p_{ik} = \delta_{ik} \text{ при } t = s, \qquad (1)$$

$$-\frac{\partial}{\partial s} p_{ik}(s, t) = \sum_j a_{ij}(s)\, p_{jk}(s, t),$$

$$p_{ik} = \delta_{ik} \text{ при } s = t, \qquad (2)$$

где коэффициенты a_{ij} непрерывны и

$$a_{ij}(t) \geqslant 0 \ (i \neq j), \quad \sum_j a_{ij}(t) = 0.$$

Дается новое элементарное доказательство существования решения $f_{ik}(s, t)$ уравнений (1) и (2), удовлетворяющего условиям

$$f_{ik}(s, t) \geqslant 0, \quad \sum_k f_{ik}(s, t) \leqslant 1 \qquad (3)$$

и уравнению Колмогорова — Чепмена. Это решение имеет смысл вероятности перехода посредством конечного числа скачков. Авторы получают его как предел при $n \to \infty$ последовательности решений конечных систем уравнений, получающихся из уравнений системы (1), если все коэффициенты a_{jk} с $\max(j, k) > n$ приравнять нулю. Доказываются также известные теоремы о том, что $f_{ik}(s, t)$ является минимальным неотрицательным решением системы (1) (и системы (2)), и др. Все эти результаты были получены впервые Феллером и Дубом (Feller W., Trans. Amer. Math. Soc., 1940, **48**, 488—515; Doob J. L., Trans. Amer. Math. Soc., 1945, 58, 455—473).

Далее исследуются дифференциальные уравнения однородного во времени процесса, в котором $a_{i, i-1} = c_i$, $a_{i, i+1} = b_i > 0$ и $a_{ij} = 0$ при $|i - j| > 1$. Устанавливается ряд необходимых и ряд достаточных условий регулярности такого процесса (регулярность означает, что выполнены все равенства $\sum_k f_{ik}(t) = 1$). Эти условия сразу вытекают из неизвестного авторам необходимого и достаточного условия регулярности, полученного Р. Л. Добрушиным (Усп. мат. наук, 1952, 7, № 6 (52), 185–191). Выводятся два следующих достаточных условия единственности решения системы (1), менее ограничительные, чем условия регулярности: 1) $c_n = 0$ для бесконечно многих n, 2) $c_n > 0$ при $n \geqslant N$ и

$$\frac{c_{n+1}\, c_n\, c_{n-1} \cdots c_N}{b_k\, b_{k-1} \cdots b_N} = O(1) \text{ при } n \to \infty.$$

А. А. Юшкевич

1273. Длина случайного пути в общих однородных пространствах. **Бохнер** (Length of random paths on general homogeneous spaces. Bochner S.), Ann. Math., 1953, 57, № 2, 309—313 (англ.)

По марковскому процессу, заданному в метрическом пространстве Ω, строятся функции $\Phi(x; r, s; u) = Me^{-u\xi}$ и $A(x; r, s; u) = Me^{-u\rho}$, где ξ— длина пути, проходимого за промежуток времени $[r, s]$ частицей, находящейся в начале этого промежутка в точке x; ρ— расстояние частицы в момент s от x. Предполагается, что процесс инвариантен относительно некоторой транзитивной группы изометрических преобразований пространства Ω, так что Φ и A не зависят от x. Устанавливается связь между функциями Φ и A.

Более подробно изучаются однородные по времени процессы с независимыми приращениями в n-мерном евклидовом пространстве.

В частности, устанавливается, что если закон распределения приращений является устойчивым с показателем q $(0 < q \leqslant 2)$ и симметричным, то длина пути, проходимого за любой конечный отрезок времени, конечна с вероятностью единица при $0 < q < 1$ и бесконечна с вероятностью единица при $1 \leqslant q \leqslant 2$. В одномерном случае при $q \neq 1$ аналогичные результаты были получены П. Леви (при этом для всех устойчивых законов, а не только для симметричных; см. Lévy P., Théorie de l'adaition des variables aléatoires, Paris, 1937, 201)

Е. Б. Дынкин

1274. Преобразования Фурье временных рядов. **Бохнер** (Fourier transforms of time series. Bochner S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, 39, № 4, 302—307 (англ.)

Рассматриваются комплексные, конечно-аддитивные случайные функции $F(\Delta)$ конечного отрезка $\Delta = \Delta_{\alpha\beta}$ $(\alpha \leqslant x < \beta)$ на прямой $(-\infty, +\infty)$; предполагается, что для любого Δ математическое ожидание $E\{|F(\Delta)|^2\} < +\infty$. Автор называет $F(\Delta)$ функцией Хинчина, если для любых двух отрезков $\Delta_1(\alpha_1, \beta_1)$ и $\Delta_2(\alpha_2, \beta_2)$ и любого вещественного t

$$E\{F(\Delta_1)\overline{F(\Delta_2)}\} = E\{F(\Delta_1^t)\overline{F(\Delta_2^t)}\},$$

где через Δ_m^t обозначен смещенный отрезок $(\alpha_m + t, \beta_m + t)$, $m = 1, 2$. Функция $F(\Delta)$ называется ортогональной, если $E\{F(\Delta_1)\overline{F(\Delta_2)}\} = 0$ при $\Delta_1\Delta_2 = 0$.

Автор формулирует следующую общую схему спектральных теорем, которую он называет «эвристической теоремой»:

1) С «каждой» функцией Хинчина $F(\Delta)$ можно связать некоторую ортогональную функцию $G(\Delta)$ (ее преобразование Фурье) так, что

$$F(\Delta_{\alpha\beta}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i\beta y} - e^{2\pi i\alpha y}}{2\pi i y}\, G(dy). \qquad (1)$$

2) Обратно, с «каждой» ортогональной функцией $G(\Delta)$ можно связать некоторую функцию Хинчина $F(\Delta)$ так, что

$$G(\Delta_{\gamma\delta}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i\delta x} - e^{-2\pi i\gamma x}}{-2\pi i x}\, F(dx).$$

Эти два преобразования взаимно обратны.

3) Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ достаточно быстро убывают в $\pm\infty$ и если

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x y}\, \psi(y)\, dy,$$

то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-\xi)\, F(d\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x\eta} \psi(\eta)\, G(d\eta).$$

В частности,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(-\xi)\, F(d\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\eta)\, dG(\eta);$$

с формальной точки зрения, выполнение этого соотношения для достаточно широкого класса пар $\{\varphi, \psi\}$ равносильно соотношению (1) для любого отрезка (α, β).

4) Наконец, для случайной функции точки

$$f_\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-\xi)\, F(d\xi)$$

формально имеем

$$E\{f_\varphi(x+t)\,\overline{f_\varphi(x)}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t\eta} \,|\psi(\eta)|^2\, \Gamma(d\eta),$$

где

$$\Gamma(\Delta) = E\{|G(\Delta)|^2\}$$

есть неотрицательная конечно-аддитивная функция отрезка с ограниченной вариацией в любом конечном отрезке.

Наиболее известной «строгой» реализацией этой схемы является известная теорема о спектральном представлении стационарного случайного процесса. Автор приводит и некоторые другие реализации более общего типа.

Все кавычки в настоящем реферате принадлежат автору реферируемой статьи. *А. Я. Хинчин*

1275. Стохастические процессы с конечными и бесконечными моментами второго порядка. Бохнер (Stochastic processes with finite and non-finite variance. Bochner S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 3, 190—197 (англ.)

В случае простейшего стохастического процесса, когда рассматривается случайная функция $x(t)$ одной переменной, конечность моментов второго порядка влечет за собою, как известно, существование случайной функции с теми же моментами первого и второго порядков, но уже с нормальным (гауссовским) распределением. Это предложение распространяется на значительно более общий класс стохастических процессов, введенный и изученный автором в одной из предшествующих работ (Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1950, **36**, 439—443).

Показывается, что в том же широком классе стохастических процессов в некоторых случаях имеет место теорема, которую в известном смысле можно рассматривать как распространение указанного результата и на процессы с бесконечными моментами второго порядка.

В приложении, никак не связанном с основным текстом статьи, рассматриваются признаки существования моментов порядка q $(0 < q < 2)$, выраженные в терминах характеристических функций. В качестве примера приведем следующий вполне законченный результат: Пусть $\varphi(\alpha)$ — характеристическая функция закона распределения $F(x)$ и пусть $0 < q < 2$; тогда для того, чтобы было

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^q\, dF(x) < +\infty,$$

необходимо и достаточно существование предела

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \left\{1 - \frac{\varphi(\alpha) + \varphi(-\alpha)}{2}\right\} \frac{d\alpha}{\alpha^{q+1}}.$$

А. Я. Хинчин

1276. Случайные возмущения регулярной прецессии гироскопа. Линник Ю. В., Новоселов В. С., Прикл. математика и механика, 1953, **17**, № 3, 361—368

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i[x_1, \ldots, x_n; A_1(t), \ldots, A_l(t); t] + S_i[x_1, \ldots, x_n; A_1(t), \ldots, A_l(t); t], i=1,2,\ldots,n, \quad (*)$$

где $\{A_1(t),\ldots,A_l(t)\}$ — l-мерный случайный процесс, X_i — заданные функции и $\{S_1, S_2,\ldots,S_n\}$ при заданных $x_j(i)$ и $A_k(t)$ является n-мерным случайным процессом; начальные значения для системы (*) предполагаются также случайными.

Формулируется общая задача об отыскании многомерных распределений вероятностей для решений $x_i(t)$, $i = 1, 2,\ldots, n$, по известным распределениям вероятностей для $A_k(t)$, S_i и начальных значений x_i°. В предположении, что функции $A_k(t)$ мало уклоняются от своих математических ожиданий $a_k(t)$, а решения $x_i(t)$ мало уклоняются от решений $y_i(t)$ системы (*), в которой положено $A_k(t) = a_k(t)$, $S_i[x_j, A_k(t), t] = 0$ и за начальные значения для x_i приняты $y_i^\circ = Mx_i^\circ$, система (*) линеаризуется относительно $z_i = x_i - y_i$, после чего выписывается общее решение $z_i(t)$ полученной линейной системы.

Далее предполагается, что многомерные случайные процессы $S_i(t) = S_i[y_j(t), a_k(t), t]$, $b_k(t) = A_k(t) - a_k(t)$, а также величины $z_i^\circ = x_i^\circ - y_i^\circ$ статистически независимы и что процессы $S_i(t)$ и $b_k(t)$ стационарны, и в этом предположении подсчитывается корреляционная матрица решений $z_i(t)$. Если процессы $S_i(t)$ и $b_k(t)$, а также z_i° подчинены распределениям Гаусса, то и $z_i(t)$ будет гауссовым процессом; в этом случае корреляционная матрица полностью определяет все распределения вероятностей для $z_i(t)$.

В заключительной части статьи развитая общая теория применяется к конкретной задаче о нахождении распределений вероятностей для уклонений движения гироскопа от регулярной прецессии в случае, когда имеются малые случайные отклонения параметров гироскопа от их средних значений

и случайный разброс начальных значений, а на гироскоп действуют небольшие случайные силы; при этом параметры гироскопа, начальные значения и случайные силы предполагаются подчиняющимися распределениям Гаусса с известными параметрами и удовлетворяющими еще некоторым дополнительным условиям. *А. М. Яглом*

1277. Случайные процессы со стационарными приращениями n-го порядка, Яглом А. М., Пинскер М. С., Докл. АН СССР, 1953, 90, № 5, 731—734.

Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс и

$$\Delta_\tau^{(n)}\xi(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \xi(t-k\tau)$$

— его разность n-го порядка с шагом τ. Если математические ожидания

$$c^{(n)}(\tau) = M\Delta_\tau^{(n)}\xi(s),$$

$$D^{(n)}(t;\ \tau_1,\ \tau_2) = M\Delta_{\tau_1}^{(n)}\xi(s+t)\,\overline{\Delta_{\tau_2}^{(n)}\xi(s)} \qquad (1)$$

при любых s, t, τ, τ_1, τ_2 существуют и не зависят от s, то процесс $\xi(t)$ называется процессом со стационарными (в широком смысле) приращениями n-го порядка. Величины (1) в дальнейшем предполагаются непрерывными функциями своих аргументов.

Основная теорема:

Для любого процесса $\xi(t)$ со стационарными приращениями n-го порядка имеют место представления $c^{(n)}(\tau) = c\tau^n$ и

$$D^{(n)}(t;\ \tau_1,\ \tau_2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\,(e^{-i\tau_1\lambda}-1)^n(e^{i\tau_2\lambda}-1)^n\,\frac{1+\lambda^{2n}}{\lambda^{2n}}\,dF(\lambda),$$

где c — постоянная, а $F(\lambda)$ — неубывающая ограниченная функция, $F(0) = 0$; c и $F(\lambda)$ данным процессом определяются однозначно.

В дальнейшем как следствие этого спектрального представления корреляционной функции авторы по известным образцам получают соответствующие спектральные представления величин $\Delta_\tau^{(n)}\xi(t)$, а также и самого процесса $\xi(t)$. *А. Я. Хинчин*

1278. Теория информации (6-ая комиссия). Блан-Лапьерр (La théorie de l'information (Commission VI). Blanc-Lapierre A.), Onde électr., 1953, 33, № 312, 182—187 (франц.)

Приводятся резюме докладов, представленных общему собранию шестой комиссии Международного объединения по вопросам радио. В частности, обсуждались следующие доклады:

1. Сообщение о понятиях количества информации, дебита и пропускной способности. Форте (Fortet R.)

В докладе предлагается новое построение основных понятий теории информации. Пусть канал в промежутке времени $(0, t)$ успевает пропустить лишь ту часть дебита источника, которая была выпущена в промежутке времени $(0, t')$ $(t' \leqslant t)$; величина $R(t) = t - t'$, рассматриваемая как случайная функция от t, называется запозданием и служит первым основным понятием предлагаемой теории.

Канал признается годным для передачи продукции данного источника, если при $t \to \infty$ запоздание $R(t)$ не растет слишком быстро; это требование может получать различные точные определения, и это многообразие возможностей придает новой теории значительную гибкость.

Понятия пропускной способности канала, дебита источника и количества информации могут быть определены при помощи введенных основных понятий. Применение новой теории к ряду схем Шеннона показало, что все эти величины тесно связаны с энтропией. Понятие энтропии получает, таким образом, новую логическую поддержку.

2. Об определении «спектра» Винера. Ван дер Поль (Van der Pol B.)

В докладе дается выражение для производной любой неубывающей функции при помощи так называемой «функции Дирака».

3. Замечания о пропускной способности канала в случае непрерывных сигналов. Блан-Лапьерр (Blanc-Lapierre A.)

При исследовании передачи непрерывных сигналов обычно ограничиваются рассмотрением случая, когда передача вводит лишь ограниченную полосу частот; в этом случае сигнал $X(t)$, понимаемый как случайная функция с ограниченным спектром, однозначно интерполируется при помощи известной формулы Котельникова, если известны значения $X(t)$ в ряде равноотстоящих точек $n/2F$ $(-\infty < n < +\infty$, $2F$ — ширина полосы частот).

Автор ставит вопрос о существовании интерполяционных формул общего типа для произвольных стационарных процессов с ограниченным спектром. Наиболее интересный результат состоит в том, что в предположении взаимной некоррелированности значений $X(t)$ в равноотстоящих точках все такие интерполяционные формулы редуцируются к формуле Котельникова, причем $X(t)$ имеет равномерный спектр в данной полосе.

4. Об одной статистической модели, построенной на схеме дробового эффекта и применимой к изучению флуктуаций вторичной эмиссии. Блан-Лапьерр.

5. Приложения теории информации.

1) Информационная теория статистической структуры языка. Мандельброт (Mandelbrot B.).

2) Приложения некоторых результатов теории информации к оптике. Блан-Лапьерр.

А. Я. Хинчин

1279. Обобщение вероятностной теории телефонных систем без ожидания. Полячек (Généralisation de la théorie probabiliste des systèmes téléphoniques sans dispositif d'attente. Polłaczek Félix), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 15, 1469—1470 (франц.)

Методом, аналогичным примененному автором в предыдущей статье (см. РЖМат, 1953, реф. 361), определяется вероятность отказа в обслуживании очередному вызову при наличии обслуживающих линий в предположении, что расстояние между двумя последовательными вызовами и время занятия линии имеют произвольные законы распределения (и удовлетворяют обычному условию независимости). В частном случае, когда вызовы поступают по закону Пуассона, а время занятия

линии подчиняется показательному закону распределения, получается известная формула Эрланга.
Б. А. Севастьянов

1280. Опечатки. Полячек (Errata. Pollaczek Félix), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 24, 2360 (франц.)

Опечатки к работе «К обобщению теории ожидания» (см. РЖМат, 1953, реф. 361).

1281. Вероятность при игре в бридж. Уо, Уо (On probabilities in bridge. Waugh Dan F., Waugh Frederick V.), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, **48**, № 261, 79—87 (англ.)

1282. Полный размер стохастической эпидемии общего типа. Бейли (The total size of a general stochastic epidemic. Bailey Norman T. J.), Biometrika, 1953, **40**, № 1—2, 177—185 (англ.)

В качестве модели эпидемии предлагается следующий случайный марковский процесс: состояния системы — тройки целых неотрицательных чисел (x, y, z), где x — число здоровых субъектов, поддающихся заражению, y — число больных заразных субъектов и z — число выбывших субъектов (выздоровевших и приобревших иммунитет, изолированных или умерших), $x + y + z = n = \text{const}$ — общая численность совокупности. За время dt с вероятностью $\beta y dt$ происходит переход $(x, y, z) \to (x-1, y+1, z)$ и с вероятностью $\gamma y dt$ происходит переход $(x, y, z) \to (x, y-1, z+1)$ (здесь γ и β — постоянные коэффициенты).

Производящая функция для вероятностей этого процесса удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных. Это уравнение решается при помощи преобразования Лапласа. Находится метод для вычисления распределения вероятностей «полного размера эпидемии» (общего числа переболевших, равного $n - \lim_{t\to\infty} x(t)$). Производится численный расчет для начального состояния $(n, 1, 0)$ при $n = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 40$ и различных $\rho = \gamma/\beta$. Для малых n вычисляется оценка наибольшего правдоподобия для определения по опытным данным параметра ρ.

Аналогичная детерминированная модель, приводящая к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, рассматривалась ранее другими авторами. Указывается, что исследования стохастической и детерминированной моделей дают качественно различные результаты. Автор отмечает, что в его распоряжении нет статистических данных, необходимых для проверки соответствия изученной модели реальным явлениям. *Р. Л. Добрушин*

1283 РЕЦ. Курс теории вероятностей. Гнеденко Б. В., 388 стр., Гостехиздат, М., 1950, 11 р. 55 к. [**Рецензия: Линник Ю. В.**, Усп. мат. наук, 1953, 8, № 3 (55), 206—209]

В конце рецензии приведен перечень ошибок и опечаток.

1284 РЕЦ. Элементарное введение в теорию вероятностей. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я., Изд. 3-е, 144 стр., М.— Л., Гостехиздат, 1952, 2 р. 20 к.

Теория вероятностей. Левкович В. Л., 102 стр., Минск, Изд-во АН БССР, 1952, 3 руб. [**Рецензия: Яглом А. М.**, Сов. книга, 1953, № 8, 3—5]

1285 РЕЦ. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. Арлей, Бух (Introduction to the theory of probability and statistics. Arley Niels, Buch K. Rander, pp. 236, John Wiley and Sons, Inc., 1950, 4.00 doll.) [**Рецензия:** Phys. Today, 1953, № 6, 18 (англ.)]

1286 РЕЦ. Опыт философии теории вероятностей. Лаплас (A philosophical essay of probabilities. Laplace Pierre Simon, pp. VIII + 196, Dover Publications, N. Y., 1951, 1.25 doll.) [**Рецензия: Брукс** (Brookes B. C.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 320, 148—149 (англ.)]

1287 РЕЦ. Введение в теорию случайных процессов, зависящих от непрерывного параметра. Манн (Introduction to the theory of stochastic processes depending on a continuous parameter. Mann Henry B., pp. 45, Order from Government Printing Office, Washington, 30 cents) [**Рецензия:** Phys. Today, 1953, **6**, № 5, 19 (англ.)]

1288 РЕЦ. Теория вероятностей. Манро (Theory of probability. Munroe M. E., pp. 213 + VIII, McGraw-Hill, N. Y., 1951, 4.50 doll.) [**Рецензия: Джонсон** (Johnson Paul B.), Math. Mag., 1953, **26**, № 4, 230—231 (англ.)]

1289 РЕЦ. Математика вероятностей. Успенский (Matematicas de las probabilidades. Uspensky J. U., pp. 450, Editorial Nigar, Buenos Aires, 1947) [**Рецензия:** (E. G.), Euclides, 1953, **13**, № 147, 227—228 (исп.)]

1290 РЕЦ. Кибернетика. Теория сигнала и информация. Сб. трудов под ред. **де Бройля** (La cybernétique. Théorie du signal et de l'information. Réunions d'études et de mises au point, tenues sous la présidence de Louis de Broglie, pp. 318, Paris, 1951, 23.40 fr.) [**Рецензия: Летт** (Laett Harry), Techn. Mitt. PTT, 1953, **31**, № 4, 120 (нем.)]

1291 РЕЦ. Теория случая. Левинсон (The theory of chance. Levinson H. C., pp. 304, Faber and Faber, London, 1952) [**Рецензия: Рибарц** (Rybarz J.), Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 25/26, 45 (нем.)]

1292 Д. О сходимости к нормальному закону. Студнев Ю. П. Автореф. дисс. канд. физ. мат. н., Ин-т математики АН УССР, Львов, 1953

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1293. Обобщение теоремы Гири. Лаха (On an extension of Geary's theorem. Laha R. G.), Biometrika, 1953, **40**, № 1-2, 228—229 (англ.)

Доказывается следующая теорема:

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ одинаково распределены, имеют конечную дисперсию σ^2 и независимы и если

при произвольно заданном значении суммы $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ условное математическое ожидание квадратичной формы $Q = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ равно $c\sigma^2$ ($c \neq 0$ — постоянная), то все x_i распределены нормально.

Эта теорема обобщает результат Гири (Geary R. C., Suppl. J. Roy. Statist. Soc., 1936, 3, 178—184). *Б. А. Севастьянов*

1294. Рассеивание на сфере. Фишер (Dispersion on a sphere. Fisher Ronald), Proc. Roy. Soc., 1953, A217, № 1130, 295—305 (англ.)

Рассматривается задача оценки некоторого направления по N независимым наблюдениям. Результаты наблюдений изображаются точками на единичной сфере. Предполагается, что наблюдения содержат случайные ошибки, распределение которых задается плотностью вероятностей

$$[k\exp(k\cos\theta)]/2\operatorname{sh}k, \qquad (1)$$

где θ — угол между истинным и наблюденным направлениями ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$), $k > 0$ — параметр.

Выводится совместное распределение длины и направления вектора-суммы N случайных векторов единичной длины, имеющих распределение (1). Строится удобный для приложений критерий значимости для оценки истинного направления. Результаты иллюстрируются числовыми примерами из области исследования земного магнетизма. *Л. Н. Большев*

1295. Теория систематической выборки. III. Сравнение «центрированной» выборки и выборки «со случайным началом». Мадоу (On the theory of systematic sampling. III. Comparison of centered and random start systematic sampling. Madow William G.), Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 1, 101—106 (англ.)

Пусть x_i $\{i = 1,\ldots, N\}, N = kn$, — элементы упорядоченной совокупности, $\bar{x}$ — их средняя арифметическая, оцениваемая по выборке объема n. Сравниваются три типа выборочной процедуры. При выборке «со случайным началом» вначале с равной вероятностью может быть взят любой из элементов $x_1, x_2,\ldots, x_k$, а затем каждый раз берется k-ый по порядку элемент после выбранного перед этим. Средняя арифметическая такой выборки $\bar{x}_{st}$ может быть с равной вероятностью любым из чисел $\bar{x}_1, \bar{x}_2,\ldots, \bar{x}_k$, где

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{i+(j-1)n}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

В «центрированной» выборке оценкой для $\bar{x}$ служит при k нечетном $\bar{x}_c = x_{(k+1)/2}$, а при k четном $\bar{x}_c = \bar{x}_{k/2}$. При случайной выборке «по слоям» совокупность разделяется на n «слоев» с элементами $x_{1+(j-1)k}, x_{2+(j-1)k},\ldots, x_{jk}$ в j-ом слое ($j = 1, 2,\ldots, k$). Из каждого слоя наудачу выбирают по одному элементу и средняя из этих элементов $\bar{x}_{st}$ служит оценкой для $\bar{x}$.

Показывается, что если совокупность монотонна (т. е. $x_i \leqslant x_{i+1}$ или $x_i \geqslant x_{i+1}$, то «центрированные» выборки точнее, чем выборки «со случайным началом»; на практике возможны также случаи, когда $D(\bar{x}_0) \leqslant D(\bar{x}_{st})$. В предположении, что x_i ($i = 1, 2,\ldots, N$) является стационарной последовательностью случайных величин с монотонной корелограммой моментов $\mu_i = E(x_sx_{s+i})$, показывается, что «центрированная» выборка точнее выборки «со случайным началом», если последовательность $\{\mu_i\}$ ($i = 1, 2,\ldots, N-1$) убывающая. При монотонно возрастающей последовательности $\{\mu_i\}$ положение оказывается противоположным. *Н. В. Смирнов*

1296. Простой метод улучшения некоторых оценок. Гудман (A simple method for improving some estimators. Goodman Leo A.), Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 1, 114—117 (англ.)

Пусть распределение случайной величины X зависит от неизвестного параметра θ и пусть x — наблюденное значение величины X. Следуя Леману (Lehmann E. L., Ann. Math Statistics, 1951, 22, 587—592), оценку $Y = f(x)$ параметра θ назовем несмещенной относительно «функции потерь» (loss function) $W(\theta, Y)$, если для каждого θ математическое ожидание $M[W(\hat{\theta}, Y)/\theta]$ минимально при $\hat{\theta} = \theta$.

Пусть θ принимает только положительные значения, $\theta M[Y/\theta] = AM[Y^2/\theta]$, где A — известная постоянная, и

$$W(\theta, Y) = \lambda(\theta)(aY - \theta)^2. \qquad (1)$$

Тогда 1) «риск» $M[\lambda(\theta)(aY - \theta)^2/\theta]$ как функция от a минимален при любом θ, если $a = A$; 2) среди всех оценок вида aY единственной оценкой, несмещенной относительно «функции потерь» (1) с $\lambda(\theta) = \theta^{-2}$, является оценка AY.

Далее указываются некоторые приложения полученных результатов. *И. И. Гихман*

1297. О квадратичных оценках компонент дисперсии. Грейбилл (On quadratic estimates of variance components. Graybill Franklin A.), Iowa State Coll. J. Sci., 1953, 27, № 2, 180—182 (англ.)

Автореферат докторской диссертации. Рассматриваются «линейные модели» (суммы случайных величин), в простейшем случае имеющие вид $y_{ij} = \mu + a_i + b_{ij}$ ($i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, n$), где μ — постоянная, a_i и b_{ij} — независимые случайные величины с общим средним 0 и с дисперсиями, соответственно, σ_a^2 и σ_b^2.

Ищутся «наилучшие квадратичные несмещенные оценки» указанных дисперсий, т. е. квадратичные формы от результатов наблюдений, подчиненные следующим условиям: 1) несмещенность относительно оцениваемого параметра; 2) дисперсия формы не должна зависеть от μ; 3) указанная дисперсия не превосходит дисперсии любой квадратичной оценки (для которой выполнены 1) и 2)).

Оценка, получаемая путем составления разного типа средних квадратичных уклонений, приравнивания их соответствующим математическим ожиданиям и решения полученных уравнений относительно оцениваемых дисперсий, называется «оценкой по методу дисперсионного анализа». Устанавливается,

что она не всегда оказывается наилучшей и иногда является сравнительно мало эффективной.

Для «модели» $y_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \mu + a^{(1)}_{i_1} + a^{(2)}_{i_1 i_2} + \ldots + a^{(t)}_{i_1 i_2 \ldots i_t}$ (где $i_t = 1, 2, \ldots, n_t$; μ — постоянная, все «a» — независимые случайные величины) оценивается σ_t^2 ($t = 1, \ldots, k$). Указывается что оценка приведенного выше типа наилучшая, если

$$E(a^{(t)}_{i_1 i_2 \ldots i_t}) = 0,\ D(a^{(t)}_{i_1 i_2 \ldots i_t}) = \sigma_t^2,\ E(a^{(t)}_{i_1 i_2 \ldots i_t})^4 = \mu_{4t} < \infty.$$

Для «модели» $y_{ij} = \mu + a_i + b_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n_i$ (отличие от предыдущей «модели» в том, что число значений j зависит от i; здесь a_i, b_{ij} независимы и имеют общее среднее 0, дисперсии, соответственно, σ_a^2 и σ_b^2 и обладают четвертыми моментами $3\sigma_a^4$ и $3\sigma_b^4$), оценка σ_a^2 по методу дисперсионного анализа не является наилучшей; можно найти лучшие оценки в зависимости от поведения n_i. Доказательства не приведены. *Ю. В. Линник*

1298. Приближение моды взвешенным средним выборочных значений. Д ж о н с (Approximating the mode from weighted sample values. J o n e s H o w a r d L.), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, 48, № 261, 113—127 (англ.)

Рассматриваются оценки моды закона распределения, являющиеся линейными комбинациями членов вариационного ряда выборки. Указывается общий прием нахождения весов, с которыми входят в оценку моды выборочные значения, по первым двум членам разложения оценки наибольшего правдоподобия в ряд Тейлора.

Если генеральная совокупность описывается функцией плотности $y = f(x - \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$, которая имеет единственную моду при $x = \theta_1$, $y' = \frac{dy}{dx}$ существует и $\varphi(x) = -y'/y$ разлагается в ряд Тейлора, то за вес при r-ом члене вариационного ряда $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, в оценке моды — параметра θ_1, принимается величина

$$w_r = \frac{\varphi'(\check{x}_r)}{\sum_{k=1}^{n} \varphi'(\check{x}_k)},$$

где $\check{x}_r$ — мода распределения случайной величины x_r.

К статье приложена таблица весов для приближенного нахождения моды t-распределения Стьюдента при различном числе степеней свободы (вместо числа n степеней свободы в таблице указан эксцесс $\alpha_4 = 3(n-2)/(n-4)$).

Кроме того, подробно разбирается простой пример и сравниваются между собой три наиболее интересные линейные оценки: оценка, полученная видоизмененным методом наибольшего правдоподобия, наилучшая из несмещенных линейных оценок и линейная оценка с наименьшим квадратичным уклонением. *Н. Н. Ченцов*

1299. Дисперсия взвешенной средней. М е й е р (Variance of a weighted mean. M e i e r P a u l), Biometrics, 1953, 9, № 1, 59—73 (англ.)

Основная задача автора — дать оценку взвешенной средней из неравноточных измерений. Пусть $u_1, \ldots, u_k$ — оценки параметра μ, независимые и нормально распределенные со средней μ и с дисперсиями $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2$. Пусть $w_i = 1/\sigma_i^2$, $w = \Sigma w_i$, $\theta_i = w_i/w$. Известно, что при заданных σ_i^2 наилучшая оценка для μ равна $\Sigma\theta_i u_i$.

В случае, когда известны лишь оценки дисперсий σ_i^2, автор рассматривает оценку $\bar{\mu} = \Sigma\hat{\theta}_i u_i$, где значок «$\wedge$» обозначает замену σ_i^2 на s_i^2 для указанной величины и s_i^2 — несмещенные оценки дисперсий σ_i^2, имеющие распределения средних квадратов с n_i степенями свободы. В частности, исследуется $V(\bar{\mu})$ — дисперсия $\bar{\mu}$. Когда n_i велики, $\hat{\theta}_i$, не представляя весов, получаемых по принципу наибольшего правдоподобия, все же дают асимптотически эффективную оценку μ и вычисляются более просто.

Для фиксированного k устанавливаются и доказываются следующие основные результаты:

1) $$V(\bar{\mu}) = \frac{1}{w}\left[1 + 2\sum \frac{\theta_i(1-\theta_i)}{n_i} + O\left(\sum \frac{1}{n_i^2}\right)\right];$$

2) приближенно несмещенная оценка $V(\bar{\mu})$ равна

$$V^* = \frac{1}{\hat{w}}\left[1 + 4\sum \frac{\hat{\theta}_i(1-\hat{\theta}_i)}{n_i}\right];$$

3) V^* имеет приближенно распределение среднего квадрата с f степенями свободы, причем $1/f = \Sigma\theta_i^2/n_i$.

Эти результаты основаны на следующей теореме:

Если $x_1, \ldots, x_k$ — независимые случайные величины, распределения которых имеют плотности

$$f_{n_i}(x_i) = \frac{(n_i/2)^{n_i/2}}{\Gamma(n_i/2)} x_i^{(n_i/2)-1} e^{-n_i x_i/2} \quad (0 \leqslant x_i < \infty),$$

и если $R(x_1, \ldots, x_k)$ — рациональная функция, не имеющая особенностей для $0 < x_1, \ldots, x_k < \infty$, то среднюю R можно разложить в асимптотический ряд по $1/n_i$; в частности,

$$\text{Ср. } R(x_1, \ldots, x_k) = R(1, \ldots, 1) + \left|\sum \frac{1}{n_i}\frac{\partial^2 R}{\partial x_i^2}\right|_{(1, \ldots, 1)} + O\left(\sum \frac{1}{n_i^2}\right).$$

Теорема остается справедливой и в некоторых более общих случаях. Автор не дает доказательства этой теоремы, ссылаясь на Уэлча (Welch B. L., Biometrika, 1938, 29, 330—362), доказавшего аналогичную теорему.

Рассматриваются также различные частные случаи, даются некоторые вспомогательные таблицы и

подробно рассматривается один пример (определение по данным различных исследователей среднего процента содержания альбумина в протеине плазмы нормальной человеческой крови).

В. И. Романовский

1300. **Метрики и регулярные, наилучшие асимптотически нормальные оценки. Тейлор** (Distance functions and regular best asymptotically normal estimates. Taylor William F.), Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 1, 85—92 (англ.)

Пусть имеется n независимых испытаний, каждое из которых может иметь ν взаимно исключающих исходов, вероятности которых $p_1,\ldots,p_\nu$ зависят от m неизвестных параметров $\theta_1, \ldots, \theta_m$ ($\sum_{i=1}^{\nu} p_i = 1$). Кроме того, пусть $q_1,\ldots,q_\nu$ — наблюденные частоты осуществления каждого исхода, а $\delta(p, q)$ — некоторая метрика в ν-мерном пространстве. (Под метрикой (distance function) здесь понимается такая функция $\delta(p, q)$ от точек p и q евклидова пространства, что $\delta(p, p) = 0$, $\delta(p,q) > 0$ при $p \neq q$ и $\delta(p, q)$ непрерывна вместе со своими производными первого и второго порядков.) В качестве оценок неизвестных параметров берутся такие значения $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_m$, которые минимизируют функцию $\delta(p, q)$. Показано (Neyman J., Proc. of the Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probab., University of California Press, 1949, 239—275), что если в качестве метрики $\delta(p, q)$ взять некоторые функции типа видоизмененного χ^2, то при достаточно общих предположениях относительно характера зависимости вероятностей p_i от параметров минимизирующие оценки параметров θ будут регулярными, наилучшими асимптотически нормальными оценками (р.н.а.н. оценками). Обобщая результаты Неймана, автор строит некоторый класс F метрик $\delta(p, q)$, минимизация которых также приводит к р.н.а.н. оценкам. Приводятся два примера, показывающих, что при соответствующем выборе функции $\delta(p, q)$ из класса F вычисление таких минимизирующих оценок может оказаться более простым, чем вычисление оценок наибольшего правдоподобия. *Л. Н. Большев*

1301. **Непараметрические толерантные области. Фрейзер** (Nonparametric tolerance regions. Fraser D. A. S.), Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 1, 44—45 (англ.)

Реферируемая работа примыкает к работам по непараметрическим оценкам Шеффе, Таки, Мерфи и др. Автор обосновывает последовательную процедуру получения «статистически эквивалентных» блоков. Эти последние представляют собой систему случайных областей $S_1, S_2,\ldots, S_{n+1}$, на которые подразделяется пространство выборки объема n так, что совместное распределение случайных величин $c_i = P\{S_i\}$, $i = 1, 2,\ldots,n+1$, равномерно на гиперплоскости пространства R^{n+1};

$$\sum_{i=1}^{n+1} c_i = 1, \quad c_i \geqslant 0.$$

При помощи эквивалентных блоков строятся (случайные) «толерантные области» T, удовлетворяющие наперед заданному условию: с вероятностью β $P\{T\} \geqslant \alpha$ $(0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1)$. *Н. В. Смирнов*

1302. **Критерии согласия для непрерывных функций распределения, не зависящие от распределения. Бернбаум** (Distribution-free tests of fit for continuous distribution functions. Birnbaum Z. W.), Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 1, 1—8 (англ.)

Пусть Ω, Ω' — некоторые классы непрерывных функций распределения и $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины с общей функцией распределения $F \in \Omega$. Рассматриваются статистики $S(X_1, \ldots, X_n, F)$, являющиеся при любом $F \in \Omega$ измеримыми и симметрическими функциями относительно $X_1, \ldots, X_n$. Выделяются следующие классы таких статистик:

1) «Статистики, не зависящие от распределения из Ω», для которых при любых t и $F \in \Omega$ $P_F\{S(X_1, \ldots, X_n, F) < t\}$ не зависит от F;

2) «Статистики, не зависящие от распределения из Ω в строгом смысле (по отношению к Ω')», для которых при любом t и при любых $F \in \Omega, G \in \Omega'$ $P_G\{S(X_1, \ldots, X_n, F) < t\}$ зависит только от FG^{-1};

3) «Статистики структуры (d)», определяемые равенством $S(X_1, \ldots, X_n, F) = \Phi[F(X_1), \ldots, F(X_n)]$, где Φ — некоторая измеримая симметрическая функция.

Изучаются связи между этими классами. Отмечается значение введенных понятий для построения критериев согласия. *Е. Б. Дынкин*

1303. **Последовательная выборка с прикреплением ярлыков для задачи определения объема популяции. Гудман** (Sequential sampling tagging for population size problems. Goodman Leo A.), Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 1, 56—69 (англ.)

Пусть P — конечная совокупность, численность некоторых подмножеств которой может быть известна заранее, но общий объем N которой, однако, неизвестен. Для оценки числа N употребляется следующий прием: задается последовательность $\{n_i\}$ целых положительных чисел; сначала из P наудачу извлекаются n_1 элементов совокупности, фиксируется общее число элементов из подмножеств известной численности, на всех извлеченных элементах делаются пометки и все они возвращаются в P; затем наудачу выбираются n_2 элементов из P, фиксируется число элементов, принадлежащих множествам с известной численностью или уже помеченных элементов. На всех извлеченных элементах делаются пометки, после чего они возвращаются в P. Процесс продолжается до тех пор, пока общее число извлеченных элементов, имеющих пометки или принадлежащих подмножествам известной численности, окажется по меньшей мере равным $L > 0$.

Пусть P не содержит подмножеств известной заранее численности (автор показывает, что общий случай может быть сведен к этому), пусть k — число потребовавшихся выборок и пусть m_i — число неотмеченных элементов среди n_i элементов i-той выборки ($i = 1, 2,\ldots, k$). В работе доказано, что

$\sum_{i=1}^{k} m_i$ является достаточной статистикой для оценки N, и построена несмещенная оценка для N, имеющая минимальную дисперсию. Найдены также предельные закономерности при $N \to \infty$.

Б. В. Гнеденко

1304. Последовательный критерий случайности. **Мур** (A sequential test for randomness. Moore P. G.), Biometrika, 1953, **40**, № 1—2, 111—115 (англ.)

Рассматривается последовательность испытаний $\{E_i\}$ с двумя исходами. Конкурируют две гипотезы. Первая: последовательность $\{E_i\}$ является последовательностью независимых испытаний Бернулли. Вторая: последовательность $\{E_i\}$ является однородной простой цепью Маркова с заданными вероятностями перехода и стационарными абсолютными вероятностями.

Строится критерий выбора между этими гипотезами (при котором требуемое для различения гипотез число испытаний заранее не фиксировано), по процедуре аналогичный последовательному анализу Вальда. Этот критерий основан на подсчете числа серий одинаковых исходов и опирается на найденные ранее Дейвидом (David F. N., Biometrika, 1947, **34**, 335) точные распределения вероятностей числа серий при обеих гипотезах. Обсуждается методика применения критерия и подробно разбирается численный пример из области метеорологии.

Р. Л. Добрушин

1305. Нижняя грань для средней численности выборки при последовательном анализе. **Хёфдинг** (A lower bound for the average sample number of a sequential test. Hoeffding Wassily), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 1, 127—130 (англ.)

Случайная величина X имеет плотность распределения $f(x, \theta)$ (или дискретна и $f(x,\theta) = P_\theta\{X=x\}$); θ — параметр, Ω — множество возможных значений θ. Пусть ω_0 и ω_1 — непересекающиеся подмножества Ω. Для выбора между двумя гипотезами $H_0 = \{\theta \subset \omega_0\}$ и $H_1 = \{\theta \subset \omega_1\}$ используется некоторая последовательная процедура S.

Пусть $P_\theta(H_i) = P_\theta\{A\}$, где A — событие «S» приводит к H_i и $P_\theta\{H_{1-i}\} \leqslant \alpha_i$, если $\theta \subset \omega_i$ $(i = 0; 1)$. В работе дается оценка снизу математического ожидания числа n независимых испытаний, необходимых для окончания процесса выбора.

В предположениях: 1) $P_\theta(H_0) + P_\theta(H_1) = 1$; 2) $\alpha_0 + \alpha_1 \leqslant 1$ имеет место неравенство

$$M_\theta n \geqslant \frac{\log[\alpha_0^c(1-\alpha_1)^{1-c} + (1-\alpha_0)^c \alpha_1^{1-c}]}{cM_\theta \log\frac{f(X,\theta)}{f(X,\theta_0)} + (1-c)M_\theta \log\frac{f(X,\theta)}{f(X,\theta_1)}} \qquad (1)$$

при любых c, θ_0, θ_1, где $0 < c < 1$, $\theta_0 \in \omega_0$, $\theta_1 \in \omega_1$.

Неравенство (1) содержит формулы А. Волда, полученные им для случая, когда ω_0 и ω_1 состоят каждое только из одного элемента.

Б. В. Гнеденко

1306. Таблицы преобразования 2 arcsin $\sqrt{p}$. **Стивенс** (Tables of the angular transformation. Stevens W. L.), Biometrika, 1953, **40**, №1-2, 70—73 (англ.)

Даются таблицы функции

$$\theta = 50 - \sqrt{1000}\arcsin(-12p),$$

связанной линейной зависимостью с функцией $2\arcsin\sqrt{p}$, которая используется в математической статистике. По сравнению с известными таблицами Хальда (Hald A., Statistical tables and formulas, J. Wiley, 1952, 97 стр.) данная таблица более подробна (шаг 0,0001) при $p = 0 \div 0{,}02$. Приводится также таблица значений функции θ для дробей $\frac{m}{n}$ со знаменателями, не превышающими 30.

Б. А. Севастьянов

1307 РЕЦ. Методы статистического анализа. **Гулден** (Methods of statistical analysis. Goulden Cyril H., pp. 467, N. Y., John Wiley and Sons, Inc., 1952, 7.50 doll.) [Рецензия: **Снедекор** (Snedecor Glorge W.), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 7, 534 (англ.)]

1308 РЕЦ. Об обращении с числами (Введение в статистику). **Шварц** (Über den Umgang mit Zahlen. Einführung in die Statistik. Schwarz Arnold, S. 228, 2 Aufl., 42 Fig., München, R. Oldenbourg, 1952, DM 14) [Рецензии: **Лохер** (Locher F.), Techn. Mitt. P. T. T., 1953, **31**, № 5, 144; (K.), Allgem. Wärmetechnik, 1953, **4**, № 1, 24 (нем.)]

1309 РЕЦ. Методы статистики. **Типпетт** (The methods of statistics. Tippett L. H. C., pp. 395, 4. th ed., Wiley, N. Y., Williams and Norgate, London, 1952) [Рецензия: **Эберль** (Eberl W.), Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 25/26, 54 (нем.)]

1310 РЕЦ. Формулы и таблицы математической статистики. **Граф, Хеннинг** (Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik. Graf Ulrich, Henning Hans-Joachim, S., 102, 9 Abb., Berlin, Springer-Verlag, 1953, DM 9) [Рецензии: **Винклер** (Winkler), Faserforsch. und Textiltechnik, 1953, **4**, № 6, 260; Textil-Praxis, 1953, **8**, № 4, 353; **Шейхль** (Scheichl), Werkstoffe und Korrosion, 1953, **4**, № 6, 240 (нем.)]

ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕХНИКЕ

1311. Об одном свойстве контрольных диаграмм, употребляемых для текущего контроля. **Пасхевич В. С.**, Прикл. математика и механика, 1953, **17**, № 4, 513—516

Доказывается, что для независимости выборочной средней и размаха (или центрального выборочного момента любой четной степени) необходимо и достаточно, чтобы генеральная совокупность была подчинена нормальному распределению. При этом предполагается, что генеральная совокупность имеет дважды дифференцируемую плотность распределения. Доказательство проведено сразу для общего случая так называемых трубчатых статистик, которыми являются, в частности, размах и центральные выборочные моменты четной степени.

Б. А. Севастьянов

1312. Введение в статистический контроль. Методы улучшения качества и снижения себестоимости. **Пуже** (Introduction au contrôle statis-

tique. Méthode d'amélioration de la qualité et du prix de revient. Pouget Gaston), J. Soc. ingrs automob., 1953, 26, № 1, 7—14 (франц.)

Обзор статистических методов контроля качества в автомобильной промышленности. Главы 1 и 2 содержат графики и контрольные диаграммы текущего статистического контроля по количественному и качественному признакам. Глава 3 посвящена приемочному контролю и содержит практические рекомендации по применению однократных и многократных выборок. *Л. Н. Большев*

1313. Применение статистики к методам классификации шерсти по толщине волокон. Энон (Contribution statistique aux méthodes de classification des finesses de la laine. Henon R.), Bull. inst. text. France, 1953, № 27, 63—81 (франц.)

В предположении, что распределение случайной величины ζ (диаметра волокон шерсти) таково, что $\eta = \ln \zeta$ имеет нормальное распределение

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{(y - \ln x_0)}{2\sigma^2}\right],$$

где x_0 — медиана распределения ζ, статистически интерпретируется стандартная процедура классификации партий шерсти.

Эта процедура предполагает: 1) построение для выборки определенного объема гистограммы распределения диаметров волокон и сравнения объемов каждого из ее классов с фиксированными пределами; 2) определение выборочной средней и сравнение ее с установленными пределами. Особенно просто указанная интерпретация осуществляется графически с использованием «вероятностной» (логарифмически-нормальной) бумаги.

Далее строится оперативная характеристика критерия оценки среднего значения случайной величины ζ по выборочной средней. Исследуются также соотношения между стандартом и средней распределения ζ при некоторых предположениях о механизме образования волокон. *Г. П. Егудин*

1314. Вычисление кривой дисперсии по длине пряжи при заданном распределении длины волокон. I. Бреня (The calculation of the variance-length curve from the length distribution of fibres. I. Breny H.), J. Text. Inst. (Proc. and Abstrs), 1953, 44, № 1, 1—9 (англ.)

Исследуется случайная стационарная функция $A(x)$, представляющая площадь поперечного сечения пряжи в точке с абсциссой x. Основные характеристики процесса $A(x)$ — нормированные дисперсии $V(L)$ и $B(L)$ площадей поперечных сечений «внутри» отрезков длины L и «между» отрезками этой длины — могут быть выражены через функцию автокорреляции $p(u)$ (см. Cox D. R., Townsend M. W., J. Text. Inst. (Proc. and Abstrs), 1951, 42, 107). Спенсер-Смит и Тод (Spencer-Smith J. L., Todd H. A. C., J. Roy Statist. Soc., 1941, 7, 131) показали, что при некоторых гипотезах относительно расположения волокон функция $p(u)$ выражается через функцию распределения длины волокон. Автор пытается дать проверку основных выводов теории. Сопоставление теоретических расчетов и опытных данных о кривой $B(L)$ обнаруживает более или менее удовлетворительное согласие для малых L. *Н. В. Смирнов*

1315. Вычисление кривой дисперсии длины пряжи при заданном распределении длины волокон. II. Бреня (The calculation of the variance-length curve from the length distribution of fibres. II. Breny H.), J. Text. Inst. (Proc. and Abstrs), 1953, 44, № 1, 10—14 (англ.)

Продолжение работы того же автора (см. реф. 1314). Делается предположение о логарифмически нормальном распределении длины волокон и показывается, как можно рассчитать в этом случае функцию дисперсии $B(L)$. Сопоставление с опытными данными обнаруживает, что теоретическая кривая является геометрически подобной опытной в интервале малых длин (до 50 *см*). *Н. В. Смирнов*

1316. Статистические методы в технических опытах. Часть I. Эйзенклам (Statistical methods in engineering experimentation. Part 1. Eisenklam P.), Research, 1953, 6, № 5, 195—201 (англ.)

Описываются методы статистического планирования технических (инженерных) опытов и рассматривается подробно схема 2×3 факторного дисперсионного анализа. В статье помещены сетчатые номограммы для распределения F (с тремя уровнями значимости $P = 0{,}01$; 0,05 и 0,10) и для распределения t (с четырьмя уровнями значимости $P = 0{,}001$; 0,01; 0,05 и 0,10). Даны таблицы подсчетов. *В. И. Романовский*

1317. О статистической интерпретации испытаний на усталость. Фрейденталь, Гумбел (On the statistical interpretation of fatigue tests. Freudenthal A. M., Gumbel E. J.), Proc. Roy. Soc., 1953, **A216**, № 1126, 309—332 (англ.)

Развивается статистическая теория явления усталости материалов, позволяющая дать истолкование результатам технических испытаний на продолжительность жизни большой группы образцов, подвергаемых повторным циклам нагрузки переменного знака. На основе наблюдений Фрейденталя (Freudenthal A. M., Proc. Roy. Soc., 1946, **A187**, 416) принимается логарифмически-нормальный закон для продолжительности жизни отдельного образца и выводится «функция выживания» $l(N)_S = \exp\left[-\frac{N}{V_S}\right]^{\alpha_S}$ — вероятность того, что ни один образец из данной группы не разрушится ранее чем через N циклов при данном напряжении S; $V_S > 0$, $\alpha_S > 0$ — два параметра.

На приведенном в статье (довольно ограниченном) материале констатируется удовлетворительное согласие теоретического расчета с опытными данными. Указывается методика обработки данных наблюдения с целью определения нижнего предела числа циклов нагрузки, для которого вероятность выживания всех образцов группы будет не менее заданной (близкой к единице) границы. *Н. В. Смирнов*

1318. Об одной задаче интерференции двух очередей. Таннер (A problem of interference between two queues. Tanner J. C.), Biometrika, 1953, 40, № 1—2, 58—69 (англ.)

Вычисляется среднее время ожидания в случае двух конкурирующих очередей. Специфика поставленной задачи ориентирована на случай проезда экипажей по участку пути, допускающему лишь

одностороннее движение. Уравнения задачи составлены в весьма общих предположениях, но явное решение их возможно только после введения упрощающих допущений. *А. Я. Хинчин*

1319. Улучшенное использование спектра частот (Meilleure utilisation du spectre des fréquences. E. D.), Electr., courants faibles, électronique, 1953, 2, № 5, 105—108 (франц.)

Статья содержит предложения относительно технической реализации приспособлений, имеющих целью понизить требования к пропускной способности канала на базе статистических свойств передаваемого материала. *А. Я. Хинчин*

1320. Теория информации. Вудуорд (Information theory. Woodward P. M.), Brit. J. Appl. Phys., 1953, 4, № 5, 129—133 (англ.)

Популярное изложение основных идей теории информации (Хартлей 1927, Шеннон 1948). *А. Я. Хинчин*

1321 К. Анализ технологических процессов механической обработки с применением статистических методов (Сокращенная стенограмма из цикла лекций). Миркин М. С., 32 стр., Всес. об-во по распространению полит. и научн. знаний, Ленингр. дом научно-техн. пропаганды, Л., 1953

В первых двух главах даны необходимые сведения из математической статистики. Далее излагаются методы установления точностных характеристик устойчивых и неустойчивых по точности технологических процессов. Некоторые рекомендации автора даются без учета конкретных особенностей изучаемых технологических процессов.

Например: 1) для исследования неустойчивых по точности процессов предлагается в течение 3—5 смен брать 10 выборок по 20—30 деталей; очевидно, что при сильной неустойчивости процесса и большой производительности станка этого явно недостаточно; 2) если контролируемый размер имеет нормальное распределение, то во всех случаях рекомендуется считать точность процесса удовлетворительной, если поле допуска больше 6σ (в случае метода группировки этот предел почему-то снижается до 5σ).

Теоретическая часть работы изложена небрежно Автор постоянно смешивает характеристики выборочного и теоретического распределений. *Л. Н. Большев*

1322 К. Текущий статистический контроль (Сокращенная стенограмма лекции). Файн Ф. А., Березин Б. П., 30 стр., Всес. об-во по распространению полит. и научн. знаний, Ленингр. дом научно-техн. пропаганды, Л., 1953

Обзор практически используемых методов текущего контроля. В основном авторы пользуются материалами энциклопедического справочника «Машиностроение» (Машгиз, 1950, 15, гл. 8). Дается сравнительная характеристика различных вариантов контроля.

Вопрос о расчете числа проб за смену и объема выборки не разбирается. В § 8 утверждается, что при текущем контроле методом группировки можно различать сигналы о разладке станка и об ухудшении точности, хотя известно, что такое различение при указанном методе контроля ненадежно. *Л. Н. Большев*

1323 РЕЦ. Статистические методы в текстильных исследованиях. Граф, Хенниг (Statistische Methoden bei textilen Untersuchungen. Graf Ulrich, Henning Hans-Joachim, S. 278, 71 Abb., Berlin, Springer-Verlag, 33 DM) [Рецензия: Textil-Praxis, 1953, 8, № 5, 433 (нем.)]

1324 РЕЦ. Контроль качества. Рамер (Kvalitetskontroll. Rimér Olle, S. 92, 79 fig., Stockholm, 1952) [Рецензия: Прамберг (Pramberg Th.), Tekn. tidskr., 1953, 83, № 19, 413 (швед.)]

1325 РЕЦ. Статистические методы в экспериментальной химии. Гор (Statistical methods for chemical experimentation. Gore W. L., pp. 210 London, Interscience Publishers Ltd., 1952, 3.50 doll. [Рецензия: Лорд (Lord E.), J. Text. Inst. (Proc. and Abstrs), 1953, 44, № 4, 146—147 (англ.)]

См. также: 1010, 1011, 1229, 1240 Д, 1245, 1417.

ГЕОМЕТРИЯ

1326. Канатные (веревочные) сети. Отто (Die Seilnetze. Otto Frei), Bauwelt, 1953, 44, № 16, 302—307 (нем.)

1327. Винтовая линия в пространстве четырех измерений. Джаспер (The helix in four dimensions. Jasper Samuel J.), J. Tennessee Acad. Sci., 1953, 28, №.2, 131 (англ.)

328. Многомерные пространства в геометрии. Гавличек (Vícerozměrné prostory v geometrii. Havlíček Karel), Rozhl. mat.-přírodověd., 1953, 32, № 3 (53), 65—80 (чеш.)

Популярное обоснование целесообразности изучения пространств многих измерений.

1329 РЕЦ. Плоская и сферическая тригонометрия. Ричардсон (Plane and spherical trigonometry. Richardson M., pp. 342, ill. 171, Macmillan, N. Y., 1950) [Рецензия: Штрёэр (Ströher W.), Internat. math. Nachr., 1953, 7, № 25/26, 53 (нем.)]

1330 РЕЦ. Плоская и сферическая тригонометрия. Рид, Рилли, Вудс (Plane and spherical trigonometry. Rietz H. L., Reilly J. F., Woods R., pp. 205 + 72, 3-rd ed. ill. 133, Macmillan, N. Y., 1950) [Рецензия: Штрёэр (Ströher W.), Internat. math. Nachr., 1953, 7, № 25/26, 53 (нем.)]

1331 РЕЦ. Повышенный курс геометрии на плоскости. Цвиккер (Advanced plane geometry.

Zwikker C., pp. 299, Amsterdam, North-Holland, 1950) [Рецензия: Бюшгенс С., Новые книги за рубежом, 1953, № 1, 38—43]

Отмечается большое число ошибок и неточностей, обесценивающих книгу.

1332 РЕЦ. **Сборник задач по аналитической геометрии. Клетеник Д. В.** Под редакцией проф. Н. В. Ефимова, 220 стр., Гостехиздат, 1950 [Рецензия: Садовский Л. Е., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 4(56), 208—210]

1333 РЕЦ. **Введение в аналитическую геометрию. Ковалевский** (Einführung in die analytische Geometrie. Kowalewski Gerhard, 4 Auflage, S. 364, 112 Fig., Verlag Walter de Gruyter und Co., Berlin, 1953) [Рецензия: Бухнер (Buchner P.), Elem. Math., 1953, 8, № 5, 118 (нем.)]

1334 РЕЦ. **Математические модели. Кандн, Роллетт** (Mathematical models. Cundy H. H. Martin, Rollett A. P., pp. 240, Geoffrey Cumberlege: Oxford University Press, 21 s.) [Рецензия: (K. R. I.), Techn. J., 1953, 45, № 368, 89—90 (англ.)]

1335 РЕЦ. **Математические развлечения. Тебо** (Les récréations mathématiques. Thébault Victor, S. 297, Gauthier-Villars, Paris, 1952) [Рецензия: Трост (Trost E.), Elem. Math., 1953, 8, № 2, 47 (нем.)]

1336 РЕЦ. **Кинематика I. Геометрические основы. Гродзинский** (Getriebelehre I. Geometrische Grundlagen. Grodzinski P., 2. Aufl., W. de Gruyter and Co., Berlin, 1953, DM 2.40) [Рецензия: Вуолийоки (Wuolijoki Jaakko), Tekn. aikakauslehti, 1953, 43, № 4, 94 (фин.)]

1337 РЕЦ. **О приложениях понятия момента инерции в геометрии. Волкович** (Sur les applications de la notion de moment d'inertie en géométrie. Wolkowitsch D., pp. 41, Gauthier-Villars, Paris, 1952) [Рецензия: Вундерлих (Wunderlich W.), Internat. math. Nachr., 1953, 7, № 25/26, 25—26 (нем.)].

1338 РЕЦ. **Геометрия эвольвент для цилиндрической зубчатой передачи. Бергштрессер** (Evolventengeometrie für Stirnrädergetriebe. Bergsträsser M., S. 24 + 38, Abb. 41, 3 Zahlentafeln, Düsseldorf, Deutscher Ingenieur-Verlag, 1952, 15 DM) [Рецензия: Лихтенхельдт (Lichtenheldt), Z. angew. Math. und Mech., 1953, 33, № 7, 250—251 (нем.)]

1339 РЕЦ. **Геометрические соотношения при изготовлении нерегулярных поверхностей. Грес** (Die geometrische Verhältnisse bei der Herstellung unregelmässiger Flächen. Gres W. H., Springer-Verlag, Berlin, 12 DM) [Рецензия: Engineering, 1953, 175, № 4560, 772—773 (англ.)]

1340 РЕЦ. **Курс прикладного тензорного исчисления (Абсолютная дифференциальная геометрия). Дени-Папен, Кауфман** (Cours de calcul tensoriel appliqué (Géométrie différentielle absolue). Denis-Papin Maurice, Kaufmann A., pp. 388, fig. 134, Paris, Michel, 1953, Cours de mathématiques supérieures appliquées, v. 3, 3440 fr. f.) [Рецензия: Салис (v. Salis), Bull. Schweiz. elektrotechn. Vereins., 1953, 44, № 13, 583 (нем.)]

1341 РЕЦ. **Тензоры в теории электрических машин. Гибс** (Tensors in electrical machine theory. Gibbs W. J., London, Chapman and Hall, Ltd., 30 s.) [Рецензии: Australas. Engr, 1953, Apr., 101—103; Троппер (Tropper H.), Brit. J. Appl. Phys., 1953, 4, № 6, 189 (англ.)]

1342 РЕЦ. **Теория и приложение волновых векторов. Дальгрен** (Theory and application of wave vectors. Dahlgren Fredrik, s. 67, 4 fig., KTH Handl. nr 51, 1951, Lindståhls, Stockholm, 1951, 7.50 kr.) [Рецензия: Хольмгрен (Holmgren Bo), Tekn. tidskr., 1953, 83, № 22, 483—484 (швед.)]

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1343. **Точки пересечения неначерченной прямой с окружностью. Вечерка** (Průsečíky nenakreslené přímky s kružnicí. Večerka Jaroslav), Mozhl., mat.-přírodověd. 1953, 32, № 1, 30—31 (чеш.)

Решение одной задачи на построение при помощи только циркуля. *Б. А. Розенфельд*

1344. **О разрешимости конструктивных задач второй степени в плоскости Лобачевского с помощью гиперциркуля или циркуля и орициркуля. Мокрищев К. К.,** Докл. АН СССР, 1953, 91, № 3, 453—456

В § 1 улучшаются результаты А. С. Смогоржевского (Наукові зап. Київськ. держ. ун-ту, 1948, 7, 4, 151) и референта (Докл. АН СССР, 1953, 88, № 4, 615—618). Доказывается, что для решения любой конструктивной задачи второй степени в плоскости Лобачевского достаточно использовать один лишь гиперциркуль, при помощи которого решаются все три главные задачи: построение точек пересечения двух прямых, двух окружностей, прямой и окружности.

В § 2 утверждается, что для решения указанных задач достаточен также комплекс инструментов: циркуль — орициркуль, при использовании преобразования инверсии в плоскости Лобачевского. Следует, однако, отметить, что при построении окружности, симметричной (в смысле преобразования инверсии) абсолюту плоскости относительно произвольно данной окружности k, автор допускает ошибку, утверждая, что радиус искомой окружности будет равен расстоянию между точкой A орицикла h и точкой P пересечения параллельного ему орицикла h_1 с окружностью k. Вследствие этого решение последующих задач и общий вывод § 2 являются необоснованными.

Замечены опечатки: на стр. 455, строка 17 сверху, вместо $\angle NCM$ должно быть $\angle NMC$; там же, строка 27 сверху, вместо ссылки (3) должна быть ссылка (5). *В. Ф. Рогаченко*

1345. **О спрямлении окружности и квадратуре круга. Шилбери** (On the rectification and squaring of the circle. Shilbury E. W.), Civil Engng, 1953, 48, № 560, 146—147 (англ.)

Дается несколько приближенных построений циркулем и линейкой отрезка, равного по длине окружности, полуокружности, четверти окружности и произвольной данной дуге окружности, а также стороны квадрата, равновеликого данному кругу. *Н. М. Бескин*

1346. Деление трапецоидальных площадей. Шектер (Proportioning trapezoidal areas. Schecter I. A.). Wood Preserv. News, 1953, **31**, № 3, 18—20 (англ.)

Дается приближенный графически-аналитический способ решения следующей задачи: разделить трапецоидальную фигуру на несколько равновеликих частей и найти центры тяжести этих частей. Параметры, определяющие решение, находятся по приводимым в работе номограммам с последующими несложными вычислениями. Указываются примеры из строительной техники, где приходится решать эту задачу. *Н. М. Бескин*

1347. Построение ортогонально-аксонометрического изображения объекта для данного направления проектирования. Якоби (Die Konstruktion des orthogonal-axonometrischen Bildes eines Objektes für eine gegebene Projektionsrichtung. Jakobi Robert), Comment. phys.-math., 1953, **17**, № 1, 1—8 (нем.)

Разбирается вопрос о построении аксонометрического изображения объекта по его комплексному чертежу, т. е. по заданным его горизонтальной и фронтальной проекциям π_1 и π_2. Как известно, при произвольном относительном расположении проекций π_1 и π_2 на плоскости изображений π можно найти такие два направления проектирования r_1 и r_2 на плоскости, что, проводя проектирующие лучи через соответственные точки проекций π_1 и π_2 параллельно направлениям r_1 и r_2, получим аксонометрическое изображение на плоскости π. Этому изображению соответствует в пространстве некоторое, вообще говоря, косоугольное направление проектирования s.

Рассматривается случай ортогонального аксонометрического проектирования, т. е. случай, когда $s \perp \pi$. В этом случае расположение проекций π_1 и π_2 на плоскости π уже не может быть произвольным. Показывается, как можно найти в этом случае искомое положение горизонтальной и фронтальной проекций объекта на плоскости π и как определить соответствующие направления проектирования r_1 и r_2 для того, чтобы получить ортогонально-аксонометрическое изображение объекта.

В конце статьи рассматриваются методы построения изображений для частных случаев, в которых плоскость π перпендикулярна к одной из плоскостей проекций π_1 и π_2.

Развиваемые методы иллюстрируются примерами построений аксонометрических изображений конкретных объектов (строительная деталь, трубопровод).

В заключение автор получает из своих построений известное соотношение $\cos w = \cos\varphi \cdot \cos\psi$ (для случая ортогонально-аксонометрического проектирования, указанное ранее Нистрёмом).
Н. Ф. Четверухин

1348 РЕЦ. Теория геометрических построений. Бибербах (Theorie der geometrischen Konstruktionen. Bieberbach L., S. 162, Basel, Birkhäuser, 1952) [**Рецензии: Аргунов Б. Балк М.,** Новые книги за рубежом, 1953, № 7, 40—44; **Сельберг** (Selberg Sigmund), Nord mat. tidskr., 1953, **1**, № 1, 59—61 (норв.)]

1349 РЕЦ. Наглядное введение в многомерную геометрию. Лицман (Anschauliche Einführung in die mehrdimensionale Geometrie. Lietzmann W., S. 220, 157 Abb., 1 Tafel, München, Oldenbourg, 1952) [**Рецензии: Штрёэр** (Ströher W.) Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 25/26, 41 (нем.); **Стуббан** (Stubban John Olav), Nord. mat. tidskr., 1953, **1**, № 1, 61 (норв.)]

1350 РЕЦ. Начертательная и кинематическая геометрия для машиностроителей. Крамес (Darstellende und kinematische Geometrie für Maschinenbauer. Krames J. L., 2 Auflage, S. 267, fig. 306, Taf. 2, Verlag F. Deuticke, Wien, 1952) [**Рецензия. Хойзерман** (Häusermann A.), Elem. Math. 1953, **8**, № 4, 95 (нем.)]

1351 РЕЦ. Начертательная геометрия. Поль (Darstellende Geometrie. Pohl W., S. 223, 407 Fig. 6 Taf., Berlin, Paed. Vlg. B. Schulz, 1951, DM 15.20) [**Рецензия**: (M.), Allgem. Wärmetechnik, 1953, **4**, № 1, 24 (нем.)]

1352 Д. Анализ методов решения некоторых задач начертательной геометрии. Веретенникова Г. К. Автореф. дисс. канд. техн. н., Ленингр. инж. строит. ин-т, Л., 1953

1353 Д. Применение начертательной геометрии к расчету состава многокомпонентных систем. Туманьян Г. Т. Автореф. дисс. канд. техн. н., Моск. станко-инструм. ин-т, Краснодар, 1953

БАРИЦЕНТРИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ, ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ДР.

1354. Арифметические действия с точками. Крейндлер (Operații aritmetice cu puncte. Kreindler Oscar), Rev. mat. şi fiz., 1953, **4**, № 4, 79—84 (рум.)

Излагается барицентрическое исчисление на плоскости и в пространстве (без ссылок на литературу); и решается ряд задач на барицентрическое сложение и вычитание точек. Этими методами доказывается несколько теорем элементарной геометрии
Б. А. Розенфельд

1355. Расширенная геометрия инверсий. Аллен (An extended inversive geometry. Allen E. F., Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 4, 233—237 (англ.)

Под геометрией инверсий автор понимает изучение свойств геометрических фигур на плоскости, опирающееся на использование комплексных координат. На плоскости вводятся «расширенные комплексные координаты» $z = x + ry$, где $r^2 = -1$, $-k^2$, 1 или k^2 (k — произвольное вещественное число). При помощи этих координат ряд теорем элементарной геометрии (теорема о пересечении высот треугольника, о круге девяти точек, о прямой Эйлера, о прямой Симсона и др.) распространяется на треугольники, вписанные в произвольное центральное коническое сечение (впрочем в том случае, когда это коническое сечение — эллипс, соответствующие теоремы тривиально получаются из элементарных теорем при помощи аффинного преобразования). *И. М. Яглом*

1356. Об одном инварианте метрированной связки сфер с радикальным центром в бесконечности. Рукавицын И. Н., Тр. Иркутского гос. ун-та, 1953, 8, № 1, 12—17

Пусть даны три основные сферы

$$K_i(x^2+y^2+z^2)+2L_ix+2M_iy+2N_iz+P_i=0,\quad i=1,\ 2,\ 3,$$

центры которых не лежат на одной прямой, и пусть эти сферы удовлетворяют условию

$$K_i\,|\,\overline{C}_i\,|\cos\widehat{\overline{C}_i\overline{C}_i'}=H, \tag{1}$$

где $\overline{C}_i$ — радиусы-векторы центров этих сфер, а

$$\overline{C}_1'=[\overline{C}_2\overline{C}_3];\quad \overline{C}_2'=[\overline{C}_3\overline{C}_1];\quad \overline{C}_3'=[\overline{C}_1\overline{C}_2].$$

Плоскость, проходящую через центры основных сфер, автор называет центральной. Если ξ, η, ζ — числа, пропорциональные степеням точки $P(x,y,z)$ относительно трех сфер, то уравнение

$$A_1\xi+A_2\eta+A_3\zeta+A_4=0 \tag{2}$$

определяет связку сфер с радикальным центром в бесконечности, центры которых лежат в центральной плоскости. Тройка значений ξ, η, ζ определяет пару точек, симметричных относительно центральной плоскости; ξ, η, ζ называются потенцсферическими координатами этой пары точек.

Пусть точки P_1 и P_2 с потенцсферическими координатами ξ_1, η_1, ζ_1 и ξ_2, η_2, ζ_2 не лежат на одном перпендикуляре к центральной плоскости. Выражение

$$d^2=(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2+(\zeta_2-\zeta_1)^2+$$

$$+2(\xi_2-\xi_1)(\eta_2-\eta_1)\cos\widehat{\overline{C}_1'\overline{C}_2'}+2(\eta_2-\eta_1)\times$$

$$\times(\zeta_2-\zeta_1)\cos\widehat{\overline{C}_2'\overline{C}_3'}+2(\zeta_2-\zeta_1)(\xi_2-\xi_1)\cos\widehat{\overline{C}_3'\overline{C}_1'}$$

остается инвариантным при любом выборе трех основных сфер из связки (2), удовлетворяющих условиям (1). Инвариант d имеет следующую геометрическую интерпретацию: $d=2Hm/\sin\theta$, где m — проекция отрезка P_1P_2 на центральную плоскость, а θ — угол между центральной плоскостью и плоскостью, проходящей через начало координат и прямую, по которой центральная плоскость пересекается с плоскостью, перпендикулярной отрезку P_1P_2 и проходящей через его середину.

Р. М. Гейдельман

1357. К плоской октавной геометрии. Фрейденталь (Zur ebenen Oktavengeometrie. Freudenthal Hans), Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., A., 1953, 56, № 3, 195—200; Indagationes math., 1953, **15**, № 3, 195—200 (нем.)

Дается определение проективной и неевклидовой (эллиптической) плоскостей над октавами (числами Кели) способом более простым, чем в книге автора (Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie, Utrecht, 1951).

В случае октав, вследствие их неассоциативности, неприменимо обычное определение проективной и неевклидовой плоскостей, пригодное в случае вещественных и комплексных чисел и кватернионов. При этом определении точка проективной плоскости задается тройкой элементов $x^i (i=1,\ 2,\ 3)$ данного тела, определенной, например, с точностью до правого множителя из того же тела ($x^i\to x^i\rho$), прямая задается уравнением $\Sigma u_i\,x^i=0$, где элементы u_i из того же тела определены с точностью до левого множителя из того же тела ($u_i\to\sigma u_i$) а неевклидова (эллиптическая) плоскость определяется как метризованная проективная плоскость, в которой расстояние ω между точками x^i, y^i задано соотношением $\cos^2\frac{\omega}{r}=(x,y)(y,x)/(x,x)(y,y)$, где $(x,x)=\sum x^i\overline{x^i}$, причем $\overline{\alpha}$ — комплексное число или кватернион, сопряженный с α, а в случае вещественных чисел $\overline{\alpha}=\alpha$; r — вещественное число, называемое радиусом кривизны.

Этот метод не применим для октав, т. к. в силу их неассоциативности $(x^i\rho)\sigma\neq x^i(\rho\sigma)$. Заметим, что матрица с элементами $x^{ij}=x^i\overline{x^j}$, являющаяся эрмитово-симметрической ($x^{ij}=\overline{x^{ji}}$), определена с точностью до вещественного множителя если $x^i\to x^i\rho$, то $x^{ij}\to x^{ij}|\rho|^2$ где $|\rho|^2=\rho\overline{\rho}$), причем элементы x^{ij} связаны соотношениями

$$x^{ij}x^{jk}=x^{ik}x^{jj}. \tag{*}$$

Поэтому автор задает точку октавной проективной плоскости эрмитово-симметрической октавной матрицей x^{ij}, удовлетворяющей условиям (*) (автор обозначает x^{ii} через ξ_i, а x^{23}, x^{31}, x^{12} соответственно через x_1, x_2, x_3), определенной с точностью до вещественного множителя. Автор показывает, что каждая эрмитово-симметрическая октавная матрица $X=(x^{ij})$ может быть приведена посредством унитарного преобразования $X\to AXA^*$ с унитарной октавной матрицей $A=(a^i_j)$, т. е. матрицей, для которой $AA^*=1$, где $A^*=(\overline{a}^{\,j}_i)$, к диагональному виду. При этом условия (*) оказываются эквивалентными тому, что матрица X приводится к виду, при котором один из диагональных элементов x^{ii} — вещественное число, отличное от нуля, а все остальные равны нулю.

Автор определяет над эрмитово-симметричными октавными матрицами третьего порядка, скалярные функции $(X,X)=\chi(X^2)$, где $\chi(X)$ — след матрицы, $(X,X,X)=\frac{1}{3}\chi(X^3)-\frac{1}{2}\chi(X^2)\chi(X)+\frac{1}{6}\chi(X^3)$, и билинейную и трилинейную функции (X,Y) и (X,Y,Z), получаемые поляризацией функций (X,X) и (X,X,X), а также операцию $X\times Y$, определяемую соотношением $(X\times Y,Z)=(X,Y,Z)$ при любом Z.

Тогда условия (*) равносильны условию $X\times X=0$; прямая определяется уравнением $(U,X)=0$ и задается матрицей того же вида U; при этом матрица U прямой, проходящей через точки, заданные матрицами X, Y, связана с ними соотношением $U=X\times Y$, а матрица X точки пересечения прямых, заданных матрицами U, V, связана с ними соотношением $X=U\times V$; условие того, что три точки, заданные матрицами X, Y, Z, лежат на одной прямой, имеет вид $(X,Y,Z)=0$. Эрмитово-симметрические октавные матрицы третьего порядка, если считать за их умножение операцию $X\circ Y=\frac{1}{2}(XY+YX)$, образуют неассоциативную алгебру Иордана.

Автор называет группу линейных преобразований $X \to AXA^*$ эрмитово-симметрических матриц, оставляющих инвариантными $\chi(X)$, (X,X) и (X, X, X), эллиптической группой октавной плоскости, а группу тех же преобразований, оставляющих инвариантной одну форму (X, X, X) (т. е. переводящих точки в точки, а прямые в прямые с сохранением их инцидентности) — проективной группой октавной плоскости.

Автор указывает без доказательства (со ссылкой на свою цитированную книгу), что эти группы соответственно изоморфны исключительным простым группам Ли F_4 и E_6, а также, что в октавной плоскости имеет место теорема о четырехстороннике, т. е. определена единственная четвертая гармоническая точка. Автор не определяет неевклидовой метрики на октавной плоскости, при которой эллиптическая группа является группой движений; очевидно, что расстояние между точками, заданными матрицами X, Y, определяется соотношением

$$\cos^4 \frac{\omega}{r} = (X, Y)^2 / (X,X)\,(Y, Y).$$

Выдвигаются две интересные проблемы: 1) изучение строения аналогичных групп в октавных пространствах любой размерности; 2) представление всех исключительных простых групп Ли в виде групп движений неевклидовых пространств над некоторыми алгебрами. *Б. А. Розенфельд*

ПРОЕКТИВНАЯ И НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИИ

1358. Недоказуемость постулата Евклида (элементарное изложение). Кизини (La non dimostrabilità del Postulato di Euclide (Trattazione elementare). Chisini O.), Period. mat., 1953, сер. 4, **31**, № 1, 7—33 (итал.)

Попытка изложения для читателя, владеющего только элементарной геометрией, доказательства недоказуемости V постулата Евклида при помощи интерпретации Бельтрами — Клейна плоскости Лобачевского. Большая часть статьи посвящена изложению проективной геометрии. Построив интерпретацию Бельтрами — Клейна, автор проверяет выполнение аксиом конгруентности и невыполнение аксиомы параллельности и указывает на выполнение остальных аксиом, откуда следует независимость аксиомы параллельности от остальных аксиом.

Автор допускает исторические ошибки: перечисляя ученых, открывших неевклидову геометрию, указывает Лобачевского на третьем месте, после Гаусса, не опубликовавшего своих результатов, и после Бояи, опубликовавшего свои результаты через три года после Лобачевского; приписывает интерпретацию Бельтрами — Клейна одному Клейну и считает, что Клейн предложил ее в 1889 г., на самом деле Бельтрами предложил ее в 1868 г., а Клейн (выяснивший ее проективную природу) — в 1871 г. *Б. А. Розенфельд*

1359. Ориентация, рассматриваемая независимо от аксиом конгруентности и параллельности. Эро-Кюри (L'orientation considérée indépendamment des axiomes de congruence et de parallélisme. Ayrault-Curie G.), Rev. gén. sci. pures et appl., 1953, **60**, № 3—4, 68—78 (франц.)

Предполагаются известными только аксиомы принадлежности и порядка. Рассматриваются системы из двух несовпадающих точек AB, трех точек ABC, не лежащих на одной прямой, четырех точек $ABCD$, не лежащих в одной плоскости. Исследуются соответствия между системами двух точек AB и $A'B'$ одной прямой, трех точек ABC и $A'B'C'$ одной плоскости, четырех точек $ABCD$ и $A'B'C'D'$ пространства.

Элементарным соответствием называется такое соответствие, при котором у соответствующих систем различен лишь один элемент: AB и $A'B$, ABC и $A'BC$, $ABCD$ и $A'BCD$. Такое соответствие называется отрицательным, если B лежит между A и A', AA' пересекает прямую BC или плоскость BCD в точке I, лежащей между A и A'. В противном случае соответствие называется положительным. Отсюда следует, что тождественное соответствие является положительным.

Цепью соответствий называется упорядоченная совокупность соответствий таких, что последняя система предыдущего соответствия является первой последующего. Если в цепи меняется все время лишь один элемент и на одном и том же месте, например, ABC, $A'BC$, $A''BC$ и т. д., то соответствие $ABC\,A''BC$ оказывается положительным, когда оба соответствия цепи одновременно положительны или отрицательны.

Произвольное соответствие можно заменить цепью элементарных соответствий и положить знак этого соответствия положительным или отрицательным в зависимости от того, четное или нечетное число отрицательных соответствий имеется в цепи. Знак соответствия не зависит от той цепи элементарных соответствий, которой это соответствие достигается. Соответствия между системами, которые отличаются лишь перестановкой двух точек AB и BA, ABC и BAC и т. д., оказываются отрицательными.

М. В. Ауссель

1360. Доказательство теоремы Хессенберга. Кронхейм (A proof of Hessenberg's theorem. Cronheim Arno), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 2, 219—221 (англ.)

Дается новое доказательство теоремы Хессенберга о том, что теорема Дезарга на проективной плоскости является следствием теоремы Паппа. Старое доказательство неприменимо, если каждая из вершин одного из треугольников теоремы Дезарга лежит на стороне другого из этих треугольников или на ее продолжении. Автор доказывает теорему и для этого случая. *Б. А. Розенфельд*

1361. О неевклидовых геометриях. Гиперболическая метрика на замкнутых регулярных поверхностях рода $\geqslant 2$. Бомпьяни (Sulle geometrie noneuclidee. Metrica iperbolica sulle superficie regolari chiuse di genere $\geqslant 2$. Bompiani Enrico), Archimede, 1953, 5, № 1, 9—16 (итал.)

Доказывается, что всякая замкнутая регулярная поверхность, называемая автором «кренделем», с $p \geqslant 2$ отверстиями всегда может быть метризована в виде плоскости Лобачевского без исключений. Для доказательства берется интерпретация плоскости Лобачевского в круге, круг непрерывно деформируется в многоугольник с $4p$ сторонами, который путем склеивания сторон превращается в указанную поверхность. При этом абсолют плоскости

Лобачевского изображается на этой поверхности p замкнутыми кривыми. *Б. А. Розенфельд*

1362 РЖ. **Неевклидовы метрики. Бомпьяни** (Metriche non-euclidee. Bompiani E., Corso tenuto all'Università di Roma nell'anno accademico 1951—1952) [Рецензия: **Далла Вольта** (Dalla Volta Vittorio), Archimede, 1953, **5**, № 2, 81—83 (итал.)]

1363 РЖ. **Алгебраическая проективная геометрия. Семпл, Нибон** (Algebraic projective geometry. Semple J. G., Knebone G. T., pp. 404, University Press, Oxford, 1952) [Рецензии: **Вундерлих** (Wunderlich W.), Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 25/26, 46—47 (нем.); **Атчисон** (Atchison W. F.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 5, 343—344 (англ.)]

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1364. О метрике алгебраических кривых. Казанова (Sur la métrique des courbes algébriques. Casanova G.), Rev. math. spéc., 1953, **63**, № 11, 541—543 (франц.)

Две алгебраические кривые (C_1) и (C_2) порядка n определяют линейный пучок. Две кривые (I) и (J) этого пучка, которые проходят соответственно через циклические точки I и J плоскости, называются изотропными.

Обобщая известную формулу Лагерра, Ладопулос (Ladopoulos P. D., C. r. Acad. sci., 1951, **233**, 1417; Bull. Acad. Roy. Belgique, 1952, avr.) назвал углом между двумя алгебраическими кривыми угол ω, определяемый формулой

$$e^{2i\omega} = [C_1, C_2, I, J],$$

где в правой части стоит сложное (ангармоническое) отношение четырех кривых пучка. «Ориентацией» системы n прямых Лагерр назвал сумму углов, которые эти прямые составляют с некоторой фиксированной прямой.

Автор доказывает следующие теоремы:

1) Угол между двумя алгебраическими кривыми порядка n равен разности ориентаций их асимптотических направлений относительно одной и той же оси.

2) Угол между двумя алгебраическими кривыми порядка n равен n раз взятому углу между направлениями осей этих кривых. Осями кривой названы прямые, образующие с осью OX углы

$$\frac{1}{n}\sum \alpha_i + k\frac{\pi}{n},$$

где α_i — углы асимптотических направлений с осью OX.

3) Пучок направлений осей алгебраической кривой порядка n параллелен или перпендикулярен этой кривой в зависимости от четности или нечетности числа n. *М. П. Черняев*

1365. О числе алгебраических комплексов прямых данного порядка, содержащих заданную алгебраическую линейчатую поверхность. Галларати (Sul numero dei complessi algebrici di rette, di ordine assegnato, che contengono una data rigata algebrica. Gallarati Dionisio), Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 2, 213—220 (итал.)

Сегре еще в 1928 году доказал, что $\binom{r-1}{2}$ — максимальное число таких линейных комплексов прямых, которые линейно независимы между собой и каждый из которых содержит все касательные алгебраической неприводимой кривой Γ (проективного) пространства S_r, и что при $r > 3$ это максимальное число достигается только для рациональной нормальной кривой.

В реферируемой работе обобщается упомянутая теорема Сегре. Прежде всего устанавливается, что

$$\theta_m = \frac{1}{m+r}\binom{m+r}{r}\binom{m+r-1}{r-1} - m(r-1) - 1$$

есть максимальное число таких алгебраических комплексов прямых порядка m пространства S_r, которые линейно независимы между собой и каждый из которых содержит заданную алгебраическую линейчатую поверхность пространства S_r. Далее доказывается, что: 1) при $m > 1$ этот максимум достигается для линейчатой рациональной нормальной поверхности V_2^{r-1} и для конусов, которые проектируют из какой-либо точки рациональную нормальную кривую C^{r-1} пространства S_{r-1}; 2) при $m = 1$ максимум θ достигается для рациональной нормальной линейчатой поверхности и для всех конусов.

Обращая последнее предложение, автор показывает, что рациональные нормальные линейчатые поверхности и конусы можно характеризовать как такие линейчатые поверхности, которые принадлежат максимальному возможному числу линейных комплексов (прямых), между собой линейно независимых.

В приведенном синтетическом доказательстве основного утверждения используются свойства грассманиана кривых пространства S_r, установленные Севери, и теоремы Сегре о размерности пространства, содержащего алгебраическую линейчатую поверхность того или иного характера.

Для доказательства обращения теоремы о характеристике нормальных линейчатых поверхностей и конусов сначала координатным методом выводится следующая лемма: если линейчатая поверхность F принадлежит N линейным комплексам прямых (линейно независимых между собой), то ее проекция из какой-нибудь точки на какое-нибудь S_{r-1} есть некоторое многообразие F', принадлежащее по крайней мере $N - r$ линейным комплексам; если же взять центр проекции на F, то F' принадлежит по крайней мере $N - r + 1$ линейным комплексам. Аналогичное предложение имеет место и в том случае, когда линейчатая поверхность F образована касательными некоторой кривой Γ.

Автор отмечает, что из его результатов вытекают некоторые свойства грассманиана прямых пространства S_r, которые нелегко было бы обнаружить прямым путем. *С. С. Бюшгенс*

1366. О многообразиях линейного пространства S_r, образованных из ∞^1 пространств S_k, которые принадлежат наибольшему числу линейных комплексов. Галларати (Sulle varietà di S_r composte di ∞^1 S_k, i cui S_k appartengono al massimo numero di complessi lineari. Gallarati Dionisio),

Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 3, 408—412 (итал.)

Обобщаются результаты предыдущей работы автора (см. реф. 1365), в которой нормальные рациональные линейчатые поверхности и конусы линейного пространства S_r были охарактеризованы, как линейчатые поверхности пространства S_r, принадлежащие наибольшему возможному числу независимых линейных комплексов прямых.

Доказывается, что непрерывная система, состоящая из ∞^1 пространств S_k пространства S_r, не может принадлежать более чем $\theta(r, k) = \binom{r+1}{k+1} - r + k - 1$ линейно независимым линейным комплексам из пространств S_k в пространстве S_r и что всякое $(k+1)$-мерное многообразие V_{k+1}, состоящее из непрерывной серии ∞^1 пространств S_k пространства S_r, принадлежащих $\theta(r, k)$ линейно независимым линейным комплексам из S_k в S_r, представляет собою нормальное рациональное S_k — V_{k+1}^{r-k} или составлено из ∞^1 пространств S_k, проходящих через одно и то же S_{k-1}.

Доказывается также, что S_k, соприкасающиеся к неприводимой алгебраической кривой, принадлежащей S_r, не могут содержаться более чем в $\lambda(r, k) = \binom{r+1}{k+2} - (k+1)(r-k) - 1$ линейно независимых линейных комплексах из S_k в S_r и что неприводимая алгебраическая кривая в S_r $(r \geqslant 4)$, соприкасающиеся S_k которой содержатся в $\lambda(r, k)$ линейно независимых линейных комплексах из S_k в S_r, представляет собою нормальную рациональную C^r. *Я. П. Бланк*

1367. О порядке циклической инволюции на алгебраической поверхности. Годо (Sur l'ordre d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique. Godeaux Lucien), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, **22**, № 2, 77—84 (франц.)

Автор использует метод и результаты ряда своих предыдущих работ (Actualités scient., № 270, Paris, Hermann, 1935; Mémoire sur les surfaces multiples, Mem, in 8°de l'Acad. roy de Belgique, 1952; Deuxième Colloque de Géométrie algébrique C. B. R. M., Liège, Thone et Paris, Masson, 1952, 235—241, и др.).

Рассматривается алгебраическая поверхность F, преобразуемая в себя посредством бирационального инволютивного порядка p (p — простое, нечетное) преобразования T.

Множество групп из p точек, каждая из которых получается из какой-либо точки применением преобразования T и его степеней, составляет инволюцию J_p порядка p. Поверхность Φ, точки которой бирационально соответствуют группам инволюции, называется образом данной инволюции. Точки, отвечающие при этом неподвижным точкам F, называются точками дирамации поверхности Φ. Предполагается, что их конечное число.

Классифицируя в своих прежних работах неподвижные точки поверхности F, автор относит каждой из них пару целых чисел α и β между 1 и p. Неподвижная точка поверхности F называется точкой второго рода, если в ее инфинитезимальной окрестности 1-го порядка преобразование T определяет инволюцию порядка p. В этом случае $\alpha \neq \beta$. Рассмотрим целые положительные числа λ_1 и μ_1 такие, что $\lambda_1 + \alpha\mu_1 = hp$; $\mu_1 + \beta\lambda_1 = h'p$ (h, h' — целые) и сумма $\lambda_1 + \mu_1$ имеет наименьшее значение.

Предполагается, что на поверхности имеется неподвижная точка A такая, что $h > 1$ и $h' > 1$ (точка третьей категории).

Пусть, далее, целые числа a, b, b', a', m, n таковы, что

$$p = a\alpha + b, \qquad (b < \alpha;\ a' < \beta)$$
$$p = b'\beta + a',$$
$$(h-1)\,b < m\alpha < hb,$$
$$(h'-1)\,a' < n\beta < h'a'.$$

Тогда касательный конус к поверхности Φ в точке дирамации A', соответствующей A, разбивается на четыре рациональных конуса порядков, соответственно, a, m, n, b'.

При проектировании из точки A' поверхности Φ на гиперплоскость окружающего пространства (не проходящую через A') получается поверхность Φ_1, причем точке A' будут соответствовать четыре рациональных кривых $\sigma_1, \tau_1, \sigma_2, \tau_2$, каждая из которых пересекается со следующей в одной точке. Эти точки (будучи, вообще говоря, двойными на поверхности Φ_1) эквивалентны, с точки зрения бирациональных преобразований, последовательностям рациональных кривых

$$\omega_1', \omega_2', \cdots, \omega_u',$$
$$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_t,$$
$$\omega_1'', \omega_2'', \cdots, \omega_v'',$$

которые вместе с $\sigma_1, \tau_1, \tau_2, \sigma_2$ определяют структуру точки дирамации A'.

Используя функциональные соотношения между кривыми Φ и Φ_1, автор выводит формулы, выражающие в виде многочленов от a, b', m, n, t, u, v порядок инволюции p, а также величины $a', b, \alpha, \beta, h, h', \lambda_1, \mu_1$. *И. З. Розенкноп*

1368. Изучение поверхностей порядка $p - 2 + h$ $(0 \leqslant h < p)$, проходящих через каноническую кривую рода p. Приложение к классификации алгебраических кривых рода, меньшего 11. Леви-Брюль-Матьё (Étude des surfaces d'ordre $p - 2 + h$ $(0 \leqslant h < p)$ passant par une courbe canonique de genre p. Application à la classification des courbes algébriques de genre inférieur à 11. Lévy-Bruhl-Mathieu Paulette), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 21, 2032—2034 (франц.)

Классификация кривых рода 6 и 7 дана Нолле (Nollet) и Жонманом (Jongmans) арифметическими методами. В реферируемой заметке развивается геометрический метод, приложимый к кривым рода, меньшего 11. Метод основан на изучении поверхностей F порядка $p - 2 + h$ $(0 \leqslant h < p)$, проходящих через каноническую кривую C рода p, взятую за проективный образ негиперэллиптических кривых рода p.

Каноническая кривая C рода p в пространстве S_{p-1} имеет порядок $2p - 2$. Поверхность F порядка $p - 2 + h$ $(0 \leqslant h < p)$, проходящая через C является нормальной и содержит линейную систему $|R|$ гиперплоских сечений, род которых не больше h; следовательно, поверхность F — линейчатая и рациональная.

В каждом случае указывается род сечений, отношение образующих F к кривой C, порядок F, существование гиперквадрик Q, содержащих или не содержащих поверхность F.

Далее эти результаты прилагаются к классификации кривых рода, меньшего 11. Указывается, что образующие пространства гиперконусов Q с вершинами на C определяют специальные линейные ряды порядка, меньшего ($p-1$), если только кривая C не лежит на эллиптическом конусе. Затем строится плоский образ C' кривой C, присоединенная система $|R'|$ которого представляет поверхность F для $p<11$. Если $p=6$, то $h\leqslant 1$; если $p=7$, то $h\leqslant 3$; если $p=8$, то $h\leqslant 6$. Впрочем одно свойство проекций C позволяет ограничиться для $p=8$ величинами $h\leqslant 4$, для $p=9$ величинами $h<6$, для $p=10$ величинами $h\leqslant 9$.

В. С. Люкшин

1369. Изучение точек особенностей поверхности. II. Максимальное число ($n-2$)-кратных инфлексиональных точек алгебраической поверхности порядка n. Ваккаро (Esame di singolarità superficiali. II. Massimo numero di punti ($n-2$)-pli inflessionali di una superficie algebrica d'ordine n. Vaccaro Giuseppe), Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 2, 203—209 (итал.)

Для неприводимой алгебраической поверхности Φ^n порядка $n\geqslant 4$ в трехмерном проективном пространстве определяется максимальное возможное число ($n-2$)-кратных инфлексиональных точек (касательная общего положения в такой точке не имеет с поверхностью других точек пересечения), не считая лежащих на ($n-2$)-кратной кривой. Для каждой точки рассматриваемого типа полярная поверхность (относительно Φ^n) распадается на касательный конус в этой точке и плоскость (гармоническая плоскость данной точки).

Автор опирается на результаты, полученные им в первой части работы (Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1952, **13**, № 6, 373—378). В случае, когда ($n-2$)-кратные инфлексиональные точки поверхности не лежат на кривых кратности выше, чем ($n-4$), количество этих точек не может превышать 4, причем, если точек ровно 4, то гармоническая плоскость каждой из точек проходит через три остальные. Эта возможность осуществляется при $n=4$, 6 на поверхностях, уравнения которых могут быть приведены к виду

$$\sum a_{ik}x_i^2x_k^2=0;\quad \sum a_{ihk}x_i^2x_h^2x_k^2=0$$
$$(i,\ h,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ i\neq h\neq k).$$

При остальных значениях $n\geqslant 4$ возможно не более двух таких точек, причем гармоническая плоскость любой из них проходит через другую точку.

Исследуя случаи, когда рассматриваемые точки могут лежать на линии кратности ($n-3$), автор получает, что при $n\geqslant 6$ не может существовать более трех ($n-2$)-кратных инфлексиональных точек. Эти три точки должны быть расположены на ($n-3$)-кратной прямой и каждые две из них сопряжены между собой при гармоническом соответствии, центром которого является третья точка, а неподвижной плоскостью — гармоническая плоскость этой точки.

При $n=5$ поверхность может иметь не более четырех трехкратных инфлексиональных точек, три из которых лежат на одной прямой, а четвертая принадлежит гармоническим плоскостям этих трех. Рассматриваются также конфигурации двойных инфлексиональных точек на поверхности четвертого порядка. Отмечается, что возможны поверхности с 12 такими точками (так называемые десмические поверхности, изученные Чани).

И. З. Розенкноп

1370 РЕЦ. Методы алгебраической геометрии. Том II. Ходж, Пидо (Methods of algebraic geometry. Hodge W. V., Pedoe D., Vol. II, pp. 394, Cambridge, University press, 1952) [Рецензия: **Узков А.**, Новые книги за рубежом, 1953. № 7, 44—45]

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

1371. Аналитические кривые на поверхности 2-го порядка. Лауффер (Analytische Kurven auf einer Fläche 2. Ordnung. Lauffer Rudolf), Math. Nachr., 1953, **9**, № 5, 301—306 (нем.)

Автор называет аналитической кривой, лежащей на поверхности $(X\,|\,X)=\sum a_{ik}X^{(i)}X^{(k)}=0$, кривую $U=U(\tau)$, где $U(\tau)$ — аналитическая функция и $(U\,|\,U)\equiv 0$ (U рассматривается как аналитическая точка в проективном пространстве). Если бы $(U'\,|\,U')\equiv 0$, то кривая (U) была бы прямолинейной образующей поверхности 2-го порядка Ф. Исключая этот случай, автор вводит в рассмотрение следующий проективный инвариантный параметр

$$t=\int\sqrt{(UU'U''U''')}\,(U'\,|\,U')^{-1}\,d\tau.$$

Пусть $V=\lambda U$, где λ связано с t соотношением $t'^2=\lambda^2(U'\,|\,U')$. Считая V функцией от t и обозначая производные по t точками наверху, получим проективный дифференциальный инвариант аналитической кривой:

$$J=(\dddot{V}\,|\,\ddot{V}).$$

Показывается, что все проективные дифференциальные инварианты кривой (U) являются алгебраическими функциями от J и его производных по t — $\dot{J}$, $\ddot{J}$, ... Находится представление инварианта J через функцию U и ее производные по τ.

Вводится инвариантно связанный с кривой сопровождающей симплекс, определяемый точками $P=\dot{V}$, $Q=\ddot{V}/\sqrt{J}$ $(J\neq 0)$, $R=iV\sqrt{J}+i\dot{Q}$ $(i=\sqrt{-1})$, $S=i(V\dot{V}\ddot{V}\,|$ (S — полюс соприкасающейся плоскости). Дается параметрическое представление поверхности относительно неподвижного тетраэдра $U_0U_1U_2U_3$

$$X=U_0+t_1U_1+t_2U_2-t_1t_2U_3,$$

при этом вершины тэтраэдра выбраны так, что параметрические кривые этого представления оказываются прямолинейными образующими поверхности.

Это представление используется затем для изучения плоских и, главным образом, неплоских кривых, расположенных на поверхности. Так, полагая t_2 аналитической функцией от t_1, отличной

от постоянной, линейной или дробно-линейной функции, получим параметрическое представление аналитической кривой (U), заданной на поверхности.

В частности, полагая $t_2 = t_1^a$ $(a \neq 0,\ 1,\ -1)$ и $t_2 = e^{t_1}$, получим все существенно различные W-кривые, расположенные на поверхности. В первом случае имеем $J = 2(a^2+1)/(a^2-1)$, во втором $J = 2$.

При коллинеациях, переводящих оба семейства образующих друг в друга (так называемых несвклидовых отражениях), кривая (U) переходит в кривую $(\overline{U})$, проективный дифференциальный инвариант которой равен $-J$. При коллинеациях, которые не переводят друг в друга образующих разных семейств (так называемых неевклидовых движениях), инвариант J не меняется. Для W-кривой $t_2 = t_1^i$ $(i = \sqrt{-1})$, в силу равенства $J = 0$, инвариант J при неевклидовых отражениях не меняется.

Н. И. Ковапцов

1372. Формула, аналогичная формуле Эннепера. Добреску (O formulă analoagă cu formula lui Enneper. Dobrescu Andrei), Gaz. mat. şi fiz., 1953, **5**, № 4, 154—156 (рум.)

Доказывается, что полная кривизна K поверхности, средняя кривизна H и угол θ между асимптотическими линиями связаны соотношением $K = -H^2 \operatorname{tg}^2\theta$. Из этого следует формула $H = \pm\frac{1}{T\operatorname{tg}\theta}$, аналогичная формуле Эннепера $K = -\frac{1}{T^2}$, где T — радиус кручения асимптотических линий.

Б. А. Розенфельд

1373. Некоторые свойства эволютных поверхностей. Березина Л. Я., Усп. мат. наук, 1953, **8**, № 3 (55), 109—110

Из деривационных формул простейших ортогональных реперов эволют поверхности Σ получаются простые формулы, связывающие между собой главные кривизны поверхности Σ и ее эволют, углы между касательной плоскостью к Σ и линиями кривизны эволют и углы между той же плоскостью и главными нормалями линий кривизны поверхности Σ. Из выведенных формул следует, что эти последние углы являются инвариантами системы поверхностей, параллельных Σ. *Р. Н. Щербаков*

1374. Определение классов поверхностей по заданным свойствам изгибания. Йонас (Bestimmung von Flächenklassen auf Grund geforderter Biegungseigenschaften. Jonas Hans), Math. Nachr., 1953, **9**, № 5, 307—320 (нем).

С поверхностью $x(u, v)$, как исходной, жестко связывается пара нормальных конгруенций $\mathfrak{X}(u, v)$, лучи которых исходят из точек поверхности x симметрично относительно касательной плоскости. Две ортогональные к этим конгруенциям поверхности $\mathfrak{x}(u, v)$ являются полостями огибающей семейства сфер с центрами в точках поверхности x и радиусами $R(u, v)$. Определяются два класса поверхностей по заданным инвариантным относительно изгибания свойствам этой конфигурации:

1. Поверхности x с линейным элементом типа $ds^2 = du dv + dR^2$, где $R = (UV+1)/(2\sqrt{U'V'})$, характеризуются тем, что асимптотическим линиям поверхности x соответствуют сопряженные сети на поверхностях $\mathfrak{x}$; поверхности $\mathfrak{x}$ в этом случае являются поверхностями качения, т. е. могут быть описаны началом подвижной системы координат при качении по x некоторой изометричной ей поверхности; частные случаи поверхностей этого класса: пара поверхностей Кало (Calo B., Ann. mat. pura ed appl., 1900, сер. 4, **3**, 123), параболоиды вращения (Гишар).

2. Поверхности, налагающиеся на поверхности $z = \operatorname{Re}\{f(x+iy)\}$, характеризуются тем, что асимптотическим линиям поверхности x соответствуют ортогональные сети на сферическом изображении конгруенции $\mathfrak{X}$; в частном случае $z = \operatorname{Re}\{e^{-i\sigma}\log(x+iy)\}$, где $\sigma = \text{const}$, это доказывается непосредственным рассмотрением известной конфигурации Бианки, состоящей из четырех псевдосферических конгруенций, лучи которых, пересекаясь, образуют косые ромбы; попутно доказывается, что если в точках пересечения нормалей противоположных фокальных поверхностей этой конфигурации провести прямые, параллельные лучам псевдосферических конгруенций, то получающиеся конгруенции всегда будут нормальными. *Р. Н. Щербаков*

1375. Доказательство достаточного условия наложимости двух поверхностей. Бань (A proof of a sufficient condition that two surfaces be applicable. Pan T. K.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 5, 318—319 (англ.)

Доказывается теорема:

Если две поверхности могут быть геодезически отображены друг на друга так, что их полные кривизны в соответственных точках равны, то эти две поверхности наложимы. Это доказательство относится к тому случаю, когда неприменимо доказательство Граушгейна (Graustein W. C., Differential Geometry, Macmillan Co., 1947, 176).

Б. А. Розенфельд

1376. Об изометрии шапочек, принадлежащих двум многообразиям. Ваккаро (Sull' isometria di calotte appartenenti a due varietà. Vaccaro Giuseppe), Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 3, 404—407 (итал.)

Термин «шапочка» (calotta) означает здесь окрестность конечного порядка точки поверхности (в отличие от терминологии А. Д. Александрова, см. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, Гостехиздат, 1943).

Две шапочки σ_n, $\overline{\sigma}_n$ порядка n называют изометричными порядка k, если можно установить между ними такое регулярное точечное соответствие, что разложения ds^2, $\overline{ds}^2$ совпадают в центрах шапочек до членов $k-1$ порядка включительно.

В реферируемой работе исследуется изометрия до 3-го порядка шапочек, принадлежащих многообразиям V_m, $\overline{V}_m$, погруженным в пространство S_{m+n}.

Доказывается, что необходимым и достаточным условием изометрии 3-го порядка между шапочками, принадлежащими многообразиям V_m, $\overline{V}_m$ пространства S_{m+n}, служит равенство кривизн шапочек в соответствующих центрах. *Я. П. Бланк*

1377. Заметка о некоторых элементах, связанных с точками поверхности. Годо (Note sur quelques éléments associés aux points d'une surface. Godeaux Lucien), Acad. roy. Belgique, Bull. cl. sci., 1953, 39, № 1, 14—23 (франц.)

Каждой точке x поверхности, отнесенной к асимптотическим линиям u, v пространства S_3, можно сопоставить известным образом последовательность Лапласа

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots,$$

где U, V — точки гиперповерхности Q Клейна второго порядка пространства S_5, изображающие асимптотические касательные в точке x поверхности.

Пусть прямая V_1V_2 пересекает Q в точках C_1, C_2 и соответственно прямая U_1U_2 — в точках D_1, D_2. Прямые

$$C_1\frac{\partial C_1}{\partial v}, \quad C_2\frac{\partial C_2}{\partial v}$$

пересекаются в некоторой точке A, а прямые

$$D_1\frac{\partial D_1}{\partial u}, \quad D_2\frac{\partial D_2}{\partial u}$$

— в точке B.

Пусть R_1, R_2 — точки пересечения прямой AB с Q. Соответствующие им в S_3 прямые r_1, r_2 представляют собою пару ребер тетраэдра Демуленa, отличных от четверки прямых пересечения поверхности второго порядка Софуса Ли Ф и поверхности второго порядка Φ_1. Аналогично, прямые

$$C_1\frac{\partial C_1}{\partial u}, \quad C_2\frac{\partial C_2}{\partial u}$$

пересекаются в точке $\bar{A}$, а прямые

$$D_1\frac{\partial D_1}{\partial v}, \quad D_2\frac{\partial D_2}{\partial v}$$

— в точке $\bar{B}$. Прямая $\bar{A}\bar{B}$ совпадает с прямой AB.

Плоскость ABA_u пересекает Q по коническому сечению. Точкам этого конического сечения соответствуют в S_3 прямолинейные образующие одной серии некоторой поверхности второго порядка (I), аналогично плоскость ABB_v приводит к поверхности второго порядка (II). Поверхности (I), (II) пересекаются по прямым r_1, r_2 и по директрисам Вильчинского. Аналогично плоскости ABA_v и ABB_u приводят к поверхностям второго порядка, которые пересекаются по прямым r_1, r_2 и s_1, s_2; эти прямые также связаны инвариантно с точкой x поверхности.

Наконец, плоскости $\bar{A}\bar{B}\bar{A}_v$ и $\bar{A}\bar{B}\bar{B}_u$ приводят к третьей паре поверхностей второго порядка, которые пересекаются по прямым r_1, r_2 и по директрисам Вильчинского второго рода. *Я. П. Бланк*

1378. Гипергеодезические, не имеющие осей стационарности. Мак-Кунн (Hypergeodesics which have no cusp-axes. MacQueen M. L.), J. Tennessee Acad. Sci., 1953, 28, № 2, 149—154 (англ.)

Гипергеодезическими линиями называются линии на поверхности, которые задаются уравнением вида $v'' = A + Bv' + Cv'^2 + Dv'^3$, где $v' = dv/du$, а A, B, C, D — любые функции от u, v, причем поверхность отнесена к асимптотическим параметрам и голономному тетраэдру Фубини. В любой точке поверхности соприкасающиеся плоскости гипергеодезических линий данного семейства огибают, в общем случае, конус 3-го класса, три стационарные плоскости которого пересекаются по прямой, называемой осью стационарности (cusp-axis, «средняя прямая Грина»).

Существует (Bell P. O., Bull. Amer. Math. Soc., 1943, 49, 575—580) два вида семейств гипергеодезических линий, не имеющих осей стационарности (т. е. таких, что их соприкасающиеся плоскости огибают конус $\varkappa$ 2-го класса): u-полярные семейства $[A = -\beta,\ D \neq \gamma]$ и v-полярные семейства $[A \neq -\beta,\ D = \gamma]$; причем каждой паре гипергеодезических линий различных семейств соответствуют ковариантные прямые: u-ребро (линия пересечения конуса $\varkappa$ 1-го семейства с полярой u-касательной относительно $\varkappa$), v-ребро (определяется аналогично), соединительное ребро (joint-edge,— линия пересечения касательных плоскостей конусов, соответствующих u- и v-ребрам), полярная ось (линия пересечения поляр, порождающих u- и v-ребра) и плоскостное ребро (planar edge,— линия пересечения плоскости u- и v-ребер с канонической плоскостью).

Рассматриваются три примера пар семейств гипергеодезических линий, характеризующихся следующими свойствами: 1) линии пересечения квадрики Вильчинского с квадриками Бомпиани лежат в соприкасающейся плоскости гипергеодезических линий; 2) линия пересечения квадрики Бомпиани с той из главных квадрик Лейна (Lane E.P., Amer. J. Math., 1932, 54, 699—706), которая пересекает квадрику Вильчинского по четырем прямым, состоит из четырех прямых; 3) квадрики Бомпиани являются осевыми квадриками (axial quadric) Л. Грина (Green L. J., Duke Math. J., 1943, 10, 557—564).

Для каждой пары определяются соответствующие ковариантные прямые, причем последние три из них во всех случаях оказываются прямыми канонического пучка: полярная ось — ребром Грина, соединительное ребро в 1-ом случае и плоскостное ребро во 2-ом — директрисой Вильчинского, плоскостное ребро в 3-ем — осью Чеха и т. д. Отметим, что в формуле (3—3) являются излишними числовые коэффициенты, формула (4—4) выписана для Q_u, а не для Q_v. *Р. П. Щербаков*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

1379. Об n-мерных римановых пространствах, допускающих группы движений порядка $n(n-1)/2+1$. Яно (On n-dimensional Riemannian spaces admitting a group of motions of order $n(n-1)/2+1$. Yano Kentaro), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 74, № 2, 260—279 (англ.)

Решается задача определения всех римановых пространств $V_n (n \neq 4)$, допускающих группы движений (полные или неполные) порядка $n(n-1)/2+1$. Этот порядок групп движений, необходимо являющихся транзитивными, непосредственно предшествует порядку $n(n+1)/2$ полных групп движений n-мерных пространств постоянной кривизны.

Рассматриваемые пространства $V_n (n \neq 4,8)$ обладают инвариантным при движениях полем на-

правлений, линии тока (геодезические) которого допускают систему ∞^1 ортогональных $(n-1)$-мерных гиперповерхностей постоянной кривизны.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы $V_n (n \neq 4,8)$ допускало группу движений y_r порядка $r = n(n-1)/2+1$, является существование системы координат, в которой линейный элемент имеет вид или

$$ds^2 = (dx^1)^2 + g_{rs}(x^t)\, dx^r dx^s, \qquad (1)$$

где $g_{rs}(x^t)dx^r dx^s$ означает линейный элемент пространства постоянной кривизны в переменных $x^2, x^3, \ldots, x^n$, или

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \cdots + (dx^n)^2}{k^2 (x^1)^2}, \qquad (2)$$

где k — постоянная. В случае (2) V_n является пространством постоянной отрицательной кривизны. Пространство V_n обладает линейным элементом (1) тогда и только тогда, когда оно конформно евклидово и допускает поле параллельных векторов.

И. П. Егоров

1380. О финслеровых пространствах с $A_i = 0$. Дейкке (Über die Finsler-Räume mit $A_i = 0$. Deicke Arno), Arch. Math., 1953, 4, № 1, 45—51 (нем.)

Картан ввел для финслеровых пространств, связанных с интегралом

$$s = \int L(x^i, \dot{x}^i)\, dt$$

(L — функция, однородная первого измерения относительно $\dot{x}^i$), основной тензор

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}$$

и тензоры

$$A_{ikl} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^l} L, \quad A_i = A^k_{ik} = L \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial \dot{x}^i},$$

$$g = \det(g_{ik}).$$

Если $A_{ikl} = 0$, то пространства римановы.

В общем случае аффинное расстояние от начала касательного пространства, связанного с точкой x_0, до любой точки индикатрисы

$$L(x_0, \dot{x}) = 1$$

равно $1/g$. Если же $A_i = 0$, т. е. $g = \text{const}$, то индикатриса — аффинная сфера. Если, кроме того, всюду $L(x, \dot{x}) > 0$, то индикатриса оказывается замкнутой поверхностью.

Доказывается теорема, распространяющая на случай n переменных теорему Бляшке о том, что замкнутая аффинная сфера — поверхность 2-го порядка.

Таким образом пространства с $A_i = 0$ и $L(x, \dot{x}) > 0$ являются римановыми.

М. В. Ауссем

1381. Класс нериманових K^*-пространств. Ван Юн-чжоу (A class of non-Riemannian K^*-spaces. Wong Yung-Chow), Proc. London Math. Soc., 1953, сер. 3, **3**, № 9, 118—128 (англ.)

Рассматриваются AK^*_N пространства, т. е. N-мерные пространства с симметрической аффинной связностью Γ^i_{jk}, у которых тензор кривизны B^i_{jkl} удовлетворяет условиям

$$B^i_{jkl|m} = B^i_{jkl}\, k_m \qquad (1)$$

или

$$B^i_{jkl|m} = 0, \; B^i_{j[kl}\, k_{m]} = 0, \qquad (2)$$

где k_m — ненулевой вектор.

Изучение римановых пространств такого рода (т. е. пространств K^*_N) в основном завершено работами Руза (Ruse H. S., Proc. London Math. Soc., 1951, сер. 2, **53**, 212—229) и Уокера (Walker A. G., Proc. London Math. Soc., 1950, сер. 2, 52, 36—64), причем последний расширил класс K_N-пространств рекуррентной кривизны (1), рассмотренных Рузом, присоединив к нему специальный класс (2) симметрических пространств. Большинство полученных ими результатов опирается на ковариантную форму тензора кривизны и потому непосредственное перенесение их на AK^*_N невозможно. Так, если риманово пространство допускает $N-2$ полей параллельных векторов, то оно является K^*_N, тогда как существуют пространства аффинной связности, допускающие даже $N-1$ полей параллельных векторов и не являющиеся AK^*_N.

Автор вводит специальный класс неплоских пространств AK^*_N — SAK^*_N, коэффициенты связности которого в надлежащей системе координат Γ^2_{11}, Γ^α_{11}, $\Gamma^2_{1\alpha}$ $(\alpha = 3, \ldots, N)$ не зависят от x^2, а остальные равны нулю. В этот класс входят за исключением одного типа все K^*_N-пространства и сверх того многие нериманова AK^*_N при любом $N \geqslant 3$. Исследована структура тензора кривизны; получены 5 канонических форм для коэффициентов связности, 3 типа метрики для римановых SAK^*_N; изучены поля параллельных векторов в SAK^*_N.

Б. Л. Лаптев

1382. Метрическое поле и векторное поле материи. (2-е сообщение). Шеррер (Metrisches Feld und vektorielles Materiefeld. (2. Mitteilung). Scherrer W.), Comment. math. helv., 1953, 27, № 2, 157—164 (нем.)

Дополняется вышедшая под тем же названием работа (Comment. math. helv., 1952, **26**, 184—202), в которой из вариационного принципа

$$\delta \int W \sqrt{-g}\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = 0$$

с обобщенным выражением W, где гравитационное поле характеризуется метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$, а материя векторным полем Φ_ρ, было получено и исследовано точное решение для статического центрально-симметрического случая.

В реферируемой работе развивается более общий подход к функции действия W. Эта функция должна быть скаляром, рациональным и однородным измерений — 2 относительно $g_{\alpha\beta}$ и 2 относительно Φ_ρ. Она должна содержать производные от $g_{\rho\sigma}$ и Φ_ρ не выше 2-го порядка, причем последние линейно.

Указываются 8 инвариантов такого рода, из которых вследствие наличия четырех линейных зависимостей между ними (в трех случаях с точностью до дивергенции) оставляются лишь 4:

$$H = R\Phi^\lambda\Phi_\lambda,\quad I = R_{\lambda\mu}\Phi^\lambda\Phi^\mu,\quad M = (\nabla_\lambda\Phi^\lambda)^2,$$
$$S = -\frac{1}{2}F_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu}$$

($R_{\lambda\mu}$ — тензор Риччи, ∇_λ — знак ковариантного дифференцирования, $F_{\lambda\mu} = \nabla_\lambda\Phi_\mu - \nabla_\mu\Phi_\lambda$). Далее найдены, соответственно принятой функции действия $W = H + 2\xi J + 2\zeta M + 2\varepsilon S$ (ξ, ζ, ε — численные константы), общие уравнения поля, из которых можно получить выражения для тензора энергии и четырех-потока. Свертыванием получен вектор U_ρ, подчиненный закону сохранения при любых значениях констант, однако вопрос о его физическом значении не выяснен. Для векторного потенциала Φ_ρ этот закон не выполняется.

В заключение высказаны соображения о цели проводимых автором исследований, об особенностях и преимуществах его полной теории поля, развитой в пределах общей теории относительности, о современной альтернативе между теорией поля и теорией вероятностей. *Б. Л. Лаптев*

1383. **Проективная классификация грассмановых соотношений и определение минимальных моделей совокупностей обобщенных пространственных элементов. Бурау** (Projektive Klassifikation der Grassmannrelationen und Kennzeichnung der Minimalmodelle für die Gesamtheiten der verallgemeinerten Raumelemente des S_n. Burau Werner), Ann. mat. pura ed appl., 1953, cep. 4, **34**, 133—160 (нем.)

Рассматривается многообразие $G_{n;k}$ («грассманово многообразие») k-мерных плоскостей n-мерного вещественного проективного пространства S_n. Каждая плоскость этого многообразия определяется $\binom{n+1}{k+1}$ грассмановыми координатами, заданными с точностью до множителя и связанными квадратичными грассмановыми соотношениями, которые можно рассматривать как уравнения гиперповерхностей второго порядка в пространстве $S_{\binom{n+1}{k+1}-1}$. Если число линейно независимых из этих уравнений равно $r(n, k)$, мы имеем r-параметрическое линейное семейство гиперквадрик. Его можно тобразить на точки пространства $S_{r(n,k)-1}$.

При коллинеации в пространстве S_n пространства $S_{\binom{n+1}{k+1}-1}$ и S_{r-1} преобразуются линейно, однако в последнем случае при $n \geqslant 7$, $\frac{n-1}{2} \geqslant k \geqslant 3$ линейные преобразования приводимы, т. е. в пространстве $S_{r(n,k)-1}$ существуют непересекающиеся плоскости, порождающие это пространство, инвариантные при этих преобразованиях; распределение точек пространства $S_{r(n,k)-1}$, изображающих грассмановы соотношения или их линейные комбинации, по этим инвариантным плоскостям и образуют проективную классификацию этих соотношений.

В работе определяются инвариантные плоскости для всех многообразий $G_{n,k}$ и находится, что эти плоскости являются минимальными моделями совокупностей пар вложенных друг в друга плоскостей разных размерностей пространства S_n, называемых в работе обобщенными пространственными элементами этого пространства. *Б. А. Розенфельд*

1384. **Псевдокелерова геометрия. Гуггенхеймер** (Geometria pseudo-käbleriana. Guggenheimer Heinrich), Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 2, 220—222 (итал.)

Рассматривается дифференцируемое многообразие размерности $2m$ над полем действительных чисел, которое является квазикомплексным, т. е. в каждой точке существует линейное преобразование I касательного пространства в этой точке такое, что $I^2 = -1$ (зависимость компонент преобразования I от координат точки выражается функциями, дифференцируемыми достаточное число раз).

Эресманом показано, что для наличия квазикомплексной структуры на многообразии необходимо и достаточно существование внешней дифференциальной формы e второго порядка такой, что $\wedge^m e \neq 0$ ($\wedge$ обозначает грассманово умножение форм). Автор дает определение псевдокелеровой структуры на квазикомплексном многообразии как такой, при которой форма e является замкнутой ($de = 0$) и выполнено условие интегрируемости Экмана — Фрёлихера.

Это условие в терминах автора эквивалентно тому, что $dd + \bar{d}\bar{d} = 0$, где d — оператор дифференцирования, $\bar{d} = CdC$, C — оператор, двойственный I, распространенный на всю алгебру внешних дифференциальных форм.

В работе показано, что существует функция $U(x^1, x^2, \ldots, x^{2m})$ от локальных координат на многообразии такая, что

$$e = -\bar{d}dU = \frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial x^k} dx^i \wedge I dx^k.$$

И. З. Розенкноп

1385 РЕЦ. **Успехи проективной теории относительности. Людвиг** (Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie. Ludwig G., S. 96, Braunschweig, Vieweg, 1951) [Рецензия: **Широков М.**, Новые книги за рубежом, 1953, № 4, 7—9]

1386 РЕЦ. **Теория относительности. Мёллер** (The theory of relativity. Møller C., pp. 386, Oxford, Clarendon Press, 1952, 35 s.) [Рецензия: (A. E. H. B.), S. Afric. J. Sci., 1953, **49**, № 9, 294 (англ.)]

1387 Д. **О дробно-квадратичном интеграле геодезических линий пространства аффинной связности. Писарева Н. М.** Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Горьковский гос. ун-т, Горький, 1953

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИССЛЕДОВАНИИ n-МЕРНЫХ МНОЖЕСТВ

388. **О вырожденных дифференциальных квадратичных формах. Анкочея** (Sur les formes différentielles quadratiques dégénérées. Ancochea Germán), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 23, 2205—2207 (франц.)

Решается вопрос о минимальном числе переменных, при помощи которых может быть выражен ds изотропного многообразия, заданного вырожденной дифференциальной формой ds^2.

Пусть $F = g_{ij}dx^i dx^j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ — дифференциальная квадратичная форма, ранг матрицы $\| g_{ij} \|$ которой равен r $(0 \leqslant r \leqslant n)$. Введением форм Пфаффа

$$\omega_i = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial dx^i} = g_{ij}dx^j$$

и их внешних дифференциалов

$$d\omega_i = \gamma_{irs}\,[dx^r dx^s] \quad \left(\text{где } \gamma_{irs} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{ir}}{\partial x^s}\right)\right)$$

доказывается, что система внешних дифференциальных уравнений

$$\omega_i = 0,\ d\omega_j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

является ковариантом формы F. Вследствие этого проблема преобразования формы F в форму с минимальным числом переменных сводится к аналогичной проблеме для замкнутой системы внешних дифференциальных уравнений (1). Сведением системы (1) к ее характеристической системе

$$g_{ij}dx^j = 0,\ \gamma_{rsj}dx^j = 0 \qquad (i, j, r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

доказывается, что минимальное число переменных, посредством которых может быть выражена форма F, равно рангу матрицы $\left\| \begin{matrix} g_{ij} \\ \gamma_{rsj} \end{matrix} \right\|$.

В заключение дается другая формулировка этого результата $\widetilde{\omega}$ именно, F представляется в виде

$$F = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \ldots + (\omega^h)^2 \qquad (h \leqslant n),$$

где ω^i — линейно независимые формы Пфаффа, и берется $n - h$ других форм Пфаффа $\widetilde{\omega}^\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, n-h)$ таких, что система ω^i, $\widetilde{\omega}^\alpha$ имеет ранг n; тогда

$$d\omega^i = \gamma^i_{rs}\,[\omega^r\omega^s] + \gamma^i_{j\alpha}\,[\omega^i\widetilde{\omega}^\alpha] + \gamma^i_{\beta\alpha}[\widetilde{\omega}^\beta\widetilde{\omega}^\alpha]$$
$$(i, j, r, s = 1, \ldots, h;\ \alpha, \beta = 1, \ldots, n-h),$$
$$(\gamma^i_{\beta\alpha} = -\gamma^i_{\alpha\beta};\ \gamma^i_{rs} = -\gamma^i_{sr}).$$

Отсюда следует, что минимальное число переменных, посредством которых можно выразить F, равно $h + k$, где k — ранг матрицы $\left\| \begin{matrix} \gamma^i_{j\alpha} \\ \gamma^i_{\beta\alpha} \end{matrix} \right\|$ $(i, j = 1, \ldots, h,$ $\alpha, \beta = 1, \ldots, n-h)$. *Н. И. Кованцов*

1389. Метрические методы в интегральной и дифференциальной геометрии. Гаддум (Metric methods in integral and differential geometry. Gaddum Jerry W.), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 1, 30—42 (англ.)

Пусть M — метрическое пространство, A — дуга в M, являющаяся гомеоморфным образом сегмента $I_1 = [0, 1]$, а f — соответствующий гомеоморфизм. Предел

$$\lim_{x \to t,\ y \to t} \rho(f(x), f(y)) / |x - y|,$$

где $\rho(f(x), f(y))$ — расстояние между точками $f(x)$, $f(y)$ дуги A, обозначается $f'(t)$ и называется растяжением f в точке t. Если часть S от $f(a)$ до $f(b)$ спрямляема, то длина ее обозначается через $s_f(a, b) = s(a, b)$. Доказывается, что если $f'(t)$ существует в каждой точке множества $E \subset I_1$, то $f'(t)$ непрерывно на E. Этот результат усиливает известную теорему об ограниченности $f'(t)$ при условии его существования на $[a, b]$ (Wilson W. A., Amer. J. Math., 1935, **57**, 62—68).

Далее следуют теоремы, в которых из предположения о существовании $f'(t)$ на $[a, b]$ выводятся соотношения

$$s(a, b) = \int_a^b f'(t)\,dt \text{ и } \lim_{x, y \to t} \rho(f(x), f(y))/s_f(x, y) = 1.$$

Во второй части работы рассматриваются определения кривизны и кручения в терминах геометрии метрического пространства, прилагаемые затем к евклидову пространству E_3. Дуга в E_3 называется бирегулярной, если она в каждой точке имеет неисчезающие кривизну и кручение. Доказывается, что если точки двух бирегулярных дуг приведены во взаимно однозначное соответствие, сохраняющее длины дуг, кривизны и кручения, то дуги конгруентны. Далее устанавливается, что при естественной параметризации бирегулярной кривой $x_i = x_i(s)$ функции $x_i(s)$, $i = 1, 2, 3$, трижды дифференцируемы. Выводятся также формулы Френе — Серре. *В. В. Рыжков*

1390. Объем, выраженный через сечения. Буземан (Volume in terms of concurrent cross-sections. Busemann Herbert), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 1, 1—12 (англ.)

Автор исходит из двух выражений

$$|M| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-r\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)}^{r\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)} |\rho|\,d\rho\right)d\omega$$

площади плоской области M, заданной в полярных координатах неравенствами $0 \leqslant \rho \leqslant r(\omega)$, $0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi$. Обобщение на n-мерный случай первого из этих выражений дает известную формулу:

$$|M| = \frac{1}{n}\int_{\Omega} r^n(u)\,d\omega_u \tag{1}$$

(Ω — поверхность единичного шара в евклидовом пространстве E_n; $d\omega_u$ — элемент объема на ней в точке u; M задано неравенствами $0 \leqslant \rho \leqslant r(u)$, $u \in \Omega$). Обобщая второе выражение, автор получает формулу

$$|M_1|\ldots|M_{n-1}| = \frac{(n-1)!}{2}\int_{\Omega}\left(\int_{M_1(u)}\ldots\int_{M_{n-1}(u)} T(p_1, \ldots, p_{n-1}, z) \times \right.$$
$$\left. \times\, dV^{n-1}_{p_1}\ldots dV^{n-1}_{p_{n-1}}\right)d\omega_u, \tag{2}$$

где $M_1, \ldots, M_{n-1}$ — множества в E_n; $M_j(u)$ обозначает сечение M_j гиперплоскостью $H(u)$, проходящей через начальную точку z нормально к вектору u, точка p_j перемещается в $M_j(u)$;

$dV^{n-1}_{p_j}$ — элемент объема в $M_j(u)$ и $T(p_1, \ldots, p_{n-1}, z)$ — объем симплекса $(p_1, \ldots, p_{n-1}, z)$.

Заменяя в этой формуле $M_{n-r+1}, \ldots, M_{n-1}$ единичным шаром U_n с центром в z, получаем выражение произведения $|M_1| \ldots |M_{n-r}|$ через $T(p_1, \ldots, p_{n-r}, z)$; в частности, при $r = n-1$ получается формула (1).

Из формулы (2) вытекает следующее предложение:

Пусть $M_1, \ldots, M_{n-1}$ — выпуклые тела в $E_n (n \geqslant 3)$ с внутренними точками; тогда

$$|M_1| \ldots |M_{n-1}| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{n} \frac{k_n^{n-2}}{k_{n-1}^n} \int_{\Omega} |M_1(u)|^{n/n-1} \ldots |M_{n-1}(u)|^{n/n-1} d\omega_u, \quad (3)$$

где $k_n = |U_n| = \pi^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)$.

Знак равенства имеет место только в случае, когда все M_j — подобные эллипсоиды с центром в z. В частности, для выпуклого тела M

$$|M|^{n-1} \geqslant \frac{1}{n} \frac{k_n^{n-2}}{k_{n-1}^n} \int_{\Omega} |M(u)|^n d\omega_u,$$

причем равенство достигается только для эллипсоида с центром в z. *В. А. Ефремович*

1391. Число наиболее далеких точек. Моцкин, Страус, Валентайн (The number of farthest points. Motzkin T. S., Straus E. G., Valentine F. A.), Pacif J. Math., 1953, 3, № 1, 221—232 (англ.)

Пусть S — множество в метрическом пространстве E. Для любой точки $x \in E$ обозначим через $y(x)$ ту точку множества S, которая имеет максимальное расстояние от x; множество всех таких точек $y(x)$ обозначим через $Y(x)$.

В реферируемой работе рассматриваются множества S, лежащие в евклидовой плоскости E_2 и обладающие тем свойством, что $Y(x)$ содержит точно одну точку или не менее двух точек. Если $y \in S$, то через $x(y)$ обозначим такую точку из S, что $y(x(y)) = y$, через $X(y)$ обозначим множество всех $x(y)$.

Теорема 1. Если S — континуум в E_2 и $y(x)$ однозначна на S, то $\bigcup_{x \in S} Y(x)$ есть граница выпуклой оболочки множества S. Эта оболочка совпадает с пересечением всех содержащих ее кругов радиуса d, где d — диаметр S (теорема остается справедливой и в плоскости Минковского M_2).

Пусть теперь S — выпуклое компактное множество в E_2 и C — его граница. Нормалью $N(x)$ к C в точке x называется восстановленный в x перпендикуляр к опорной прямой $L(x)$ к C в точке x.

Теорема 2. Пусть $y(x)$ однозначна на C; тогда: 1) множество $X(y)$ состоит из всех точек пересечения нормалей к C в точке y с $C - y$. Если C имеет касательную в точке y, то $x(y)$ однозначна и непрерывна в этой точке; 2) отображение $x(y)$ монотонно, т. е. порядок $x(y_1)$, $x(y_2)$, $x(y_3)$ тот же, что и y_1, y_2, y_3.

Следствие. Пусть $\alpha\beta$ — один из диаметров C и $N(\alpha, \beta)$ — общая нормаль к C в точках α и β. Тогда $y(x)$ однозначна на C в том и только в том случае, если для каждых двух точек $u, v \in C$, которые лежат по одну сторону от $N(\alpha, \beta)$, нормали $N(u)$ и $N(v)$ пересекаются внутри C.

Для дальнейшего расширяются понятия центра кривизны и эволюты. Взяв на C точку x вместе с опорной прямой $L(x)$ и дугу δ, $x \in \delta \subset C$, автор рассматривает окружность, касающуюся $L(x)$ в x и проходящую через точку $p \in \delta - x$. Центр этой окружности $z(p)$ лежит на нормали $N(x)$. Установив на $N(x)$ порядок по расстоянию от x, автор полагает

$$E_s(x, \delta) \equiv \sup_{p \in \delta - x} z(p); \qquad E_l(x, \delta) \equiv \inf_{p \in \delta - x} z(p)$$

и рассматривает четыре вида «центров кривизны»:

$$E_s(x) \equiv E_s(x, C), \qquad E_l(x) \equiv E_l(x, C),$$

$$E_0(x) \equiv \lim_{\delta \to x} E_s(x, \delta), \qquad E_i(x) \equiv \lim_{\delta \to x} E_l(x, \delta).$$

Очевидно, что $E_l(x) \leqslant E_i(x) \leqslant E_0(x) \leqslant E_s(x)$ относительно $N(x)$. Множества: $\{E_s(x)\}$, $\{E_0(x)\}$, $\{E_i(x)\}$ и $\{E_l(x)\}$, где x пробегает C, называются соответственно: верхней, внешней, внутренней и нижней эволютами кривой C и обозначаются: E_s, E_0, E_i и E_l.

Теорема 3. Если $y(x)$ однозначна на C, то ее верхняя эволюта (а следовательно, и остальные три эволюты) содержатся в S.

Теорема 4. Если внутренняя эволюта C содержится в $S - C$, то $y(x)$ однозначна на C.

Теорема 5. Пусть $E_s \subset S$; тогда $y(x)$ перестает быть однозначной на C в том и только в том случае, если на C найдется точка $x \in E_i, E_0, E_s$, являющаяся центром окружности, имеющей дугу, которая составляет часть C.

Теорема 6. $y(z)$ однозначна, если $z \neq E_s(x)$ для всех $x \in C$; $y(z)$ не однозначна, если $z = E_s(x)$, $z \neq E_0(x)$ для некоторого $x \in C$.

Теорема 7. $E_s \subset S$ тогда и только тогда, когда $E_0 \subset S$; $E_s \subset S - C$ тогда и только тогда, когда $E_0 \subset S - C$.

Пусть для компактного $S \subset E_2$ через D обозначена совокупность концов его диаметров, тогда, если $Y(x)$ содержит по крайней мере две точки для каждого $x \in D$, то $Y(x)$ состоит точно из двух точек при $x \in D$, и D содержит лишь конечное (нечетное) число точек. $Y(x) \subset D$ для каждого $x \in S$. Если $Y(x)$ содержит по крайней мере две точки для каждого $x \in S$, то S является частью суммы конечного числа прямолинейных отрезков. Если $Y(x)$ состоит точно из двух точек при $x \in S$, то S не может быть связным.

В. А. Ефремович

1392. О вписывании n-мерных множеств в правильный n-симплекс. Гейл (On inscribing n-dimensional sets in a regular n-simplex. Gale David) Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 2, 222—225 (англ.)

Множество S называется вписанным в n-мерный симплекс Σ, если $S \subset \Sigma$ и пересекается с каждой из $(n-1)$-мерных граней Σ. Доказывается следующая теорема:

Пусть S — замкнутое множество n-мерного пространства, имеющее диаметр, равный единице.

Тогда S можно вписать в правильный n-мерный симплекс диаметра $d \leqslant \sqrt{n(n+1)/2}$.

Рассмотрение правильного симплекса, описанного около сферы единичного радиуса, показывает, что этот результат не может быть улучшен. Рассматривается приложение этой теоремы к задаче о разложении n-мерного множества диаметра 1 на $n+1$ множеств, имеющих меньшие диаметры, поставленной Борсуком (Borsuk K., Fund. Math., 1933 **20**, 177—179).

Для двумерного пространства получается следующий оптимальный результат: всякое плоское множество, имеющее диаметр 1, является объединением трех множеств диаметров $d \leqslant \sqrt{3/2}$.

В. В. Рыжков

1393. О некоторых системах преобразований. Шарюо (Sur certains systèmes de transformations. Charrueau André), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 16, 1529—1531 (франц.)

Пусть $\mathcal{E}$ — множество инволютивных преобразований, зависящих от одного параметра, причем:

1) если τ, τ_1, $\tau_2 \in \mathcal{E}$, то и $\tau' = \tau\tau_1\tau_2 \in \mathcal{E}$;

2) значения параметра μ' и μ (соответствующие τ' и τ) при постоянных τ_1 и τ_2 связаны друг с другом посредством гомографии $\mathcal{H}$, двойные точки которой одни и те же при любых τ_1 и τ_2 из $\mathcal{E}$. Эти условия, например, выполнены в случае поляритетов, отвечающих пучку линейных комплексов, и в случае пучка инверсий.

Основываясь на результатах, полученных им относительно линейных комплексов (например, см. РЖМат, реф. 410), автор изучает свойства линейных систем инверсий пространства.

Рассмотрим пучок Ф инверсий, отвечающих сферам, имеющим общую радикальную плоскость Π. Обозначив через M полюс какой-либо инверсии I пучка, а через O — некоторую начальную точку на прямой полюсов, примем $\overline{OM} = \mu$ за значение параметра, соответствующее данной инверсии. Пусть λ_1 и λ_2 — значения параметра, отвечающие предельным точкам пучка Ф. Используя (при $\lambda_1 \neq \lambda_2$) величины $\alpha = (\mu-\lambda_1)/(\mu-\lambda_2)$, автор дает выражения для параметров произведения нескольких инверсий. Так, при нечетном n для произведения инверсий $I_1 I_2 \ldots I_n = I_{1n}$ имеем

$$\alpha_{1n} = \frac{\alpha_1 \alpha_3 \ldots \alpha_n}{\alpha_2 \alpha_4 \ldots \alpha_{n-1}}.$$

Пусть $\tau = I_0 I_1$, где I_0, I_1 — инверсии из Ф, и s — последовательность инверсий Ф:

$$\ldots, I_0\tau^{-j}, \ldots, I_0\tau^{-1}, I_0, I_0\tau, \ldots, I_0\tau^{k}, \ldots$$

Соответствующие значения α образуют геометрическую прогрессию. В случае, если α_1/α_0 — первообразный корень степени p из 1, в последовательности s имеется цикл из p элементов. Если сферы, соответствующие I_0 и I_1, действительны и пересекаются, то угол между ними имеет одно из значений $k\pi/p$ ($k = 1; 2; \ldots; p-1$).

При $\lambda_1 = \lambda_2 = h$ величины $1/(\mu - h)$, соответствующие преобразованиям последовательности s, образуют арифметическую прогрессию. Циклов в этом случае нет.

Касаясь линейных систем инверсий от большего числа параметров (три), автор замечает, что, по аналогии с системами линейных комплексов (C. r. Acad. sci., 1951, **232**, 144; 202), результаты могут быть интерпретированы в кэлиевой геометрии, если принять за абсолют предельную сферу системы.

В C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 20 на стр. 2015 помещено исправление несущественной опечатки.

И. З. Розенкноп

ВЫПУКЛЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

1394. Плоские семейства прямых. I. Хаммер. Собчык (Planar line families. I. Hammer P. C., Sobczyk Andrew), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 2, 226—233 (англ.)

Семейство F прямых на аффинной плоскости авторы называют «простым снаружи», если существует такой круг, что через каждую точку вне его (включая и бесконечно удаленные) проходит одна и только одна прямая семейства. Доказывается, что каждое такое семейство может быть задано при помощи непрерывной возрастающей функции, отображающей отрезок [0, 1] на себя. Каждое такое семейство есть семейство продолженных диаметров некоторой выпуклой кривой постоянной ширины.

Дается способ построения всех выпуклых замкнутых линий постоянной ширины, основанный на свойствах простых снаружи семейств.

Эта заметка непосредственно примыкает к заметке одного из авторов (Hammer P. C., Proc. Amer. Math. Soc, 1951, 2,781—793). *В. А. Ефремович*

1395. Новое доказательство теоремы о четырех вершинах. Крафт (Ein neuer Beweis des Vierscheitelsatzes. Krafft Maximilian), Arch. Math., 1953, **4**, № 1, 43—44 (нем.)

Теорема о четырех вершинах утверждает, что замкнутая выпуклая кривая с непрерывно изменяющейся кривизной имеет по меньшей мере четыре вершины (т. е. точки, в которых кривизна достигает экстремума). Эта теорема доказывалась неоднократно. В реферируемой работе дается одно из простейших доказательств. Идея доказательства такова:

Из замкнутости кривой делается вывод, что число вершин четно; предположим, что их две; изменение кривизны между вершинами происходит монотонно. Удается найти хорду кривой такую, что в ее конечных точках кривизны одинаковы, а касательные параллельны. Эта хорда разбивает кривую на две дуги, на одной из которых лежит точка максимальной кривизны, а на другой — минимальной.

Повернув одну из этих дуг вокруг средины найденной хорды на 180°, получаем две выпуклые дуги, опирающиеся на эту хорду. В каждом из концов хорды касательные к обеим дугам совпадают, а касательные в различных концах хорды параллельны. При этом в точках одной дуги (кроме конечных) кривизны всюду меньше, чем в точках другой. Последнее невозможно. Это приводит предположение о наличии двух вершин к противоречию.

М. В. Потоцкий

1396. Полная система неравенств для объемов суммы и разности выпуклых тел по Минковскому. Оман (Ein vollständiges Ungleichungssystem für Minkowskische Summe und Differenz. Ohmann D.), Comment. math. helv., 1953, **27**, № 2, 151—156 (нем.)

Известные неравенства для объемов суммы и разности выпуклых тел A и $B \subseteq A$ в R_n

$$V(A+B)^{1/n} \geqslant V(A)^{1/n} + V(B)^{1/n}$$
$$V(A-B)^{1/n} \leqslant V(A)^{1/n} - V(B)^{1/n} \quad (1)$$

для случая двумерных областей могут быть заменены более сильными. А именно,

$$F(A+B) + F(A-B) \geqslant 2\,(F(A) + F(B))$$
$$2F(A-B)^{1/2} F(A)^{1/2} \leqslant 3F(A)] + F(B) - F(A+B). \quad (2)$$

В реферируемой работе показывается, что система неравенств (2) является полной в том смысле, что для любой четверки неотрицательных чисел x_1, x_2, x_3, x_4, удовлетворяющих неравенствам:

а) $x_1 \geqslant x_4 \geqslant 0$; $x_2 \geqslant 0$;
б) $x_3 + x_4 \geqslant 2(x_1 + x_2)$;
в) $2(x_1 x_4)^{1/2} \leqslant 3x_1 + x_2 - x_3$,

можно указать выпуклые области A и $B \subseteq A$ такие, что $F(A) = x_1$; $F(B) = x_2$; $F(A+B) = x_3$; $F(A-B) = x_4$. *А. В. Погорелов*

1397. Поправка к статье «О парах выпуклых фигур». Сантало (Correccion al articulo «Sobre pares de figuras convexas». Santaló M. A.), Gaz. mat. Lisboa, 1953, 14, № 54, 6 (исп.)

Автор указывает, что в доказательство леммы II его предыдущей работы (Gaz. Mat. Lisboa, 1951, № 50, 7—10) вкралась ошибка, а сама лемма неверна; в связи с этим неверным оказалось также предложенное автором обобщение теоремы Хелли (Helly), как на это указал Блюменталь (Blumenthal), противоречащий пример к этому обобщению построил Моцкин (Motzkin). *А. С. Есенин-Вольпин*

1398. К вопросу о существовании выпуклой поверхности с заданной суммой главных радиусов кривизны. Погорелов А. В., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 3 (55), 127—130

Находится простое достаточное условие, которое надо наложить на неотрицательную функцию $F(\xi)$ точки ξ единичной сферы, для того, чтобы существовала выпуклая поверхность, имеющая $F(\xi)$ суммой главных радиусов кривизны в точке, определяемой нормалью ξ. Это условие имеет вид

$$\lambda(\xi, t) = F(\xi) - F_{ss}(\xi) \geqslant 0, \quad (1)$$

где дифференцирование функции F проводится по длине s большого круга, проходящего через точку ξ единичной сферы в направлении t. Вывод условия основан на том, что, как показывается в работе, меньший из главных радиусов кривизны поверхности в точке с нормалью ξ обязательно превосходит $\lambda(\xi, t)$; таким образом условие (1) обеспечивает то, что все точки рассматриваемой поверхности являются эллиптическими. По поводу второго условия

$$\int_\Omega \xi F(\xi)\, d\omega = 0,$$

($d\omega$ — элемент площади поверхности единичной сферы Ω), которое надо наложить на функцию $F(\xi)$, см., например, В. Бляшке, Дифференциальная геометрия, М.—Л., ОНТИ, 1935, стр. 224.

Таким образом в работе исправляется ошибочная теорема существования выпуклых поверхностей с заданной суммой главных радиусов кривизны, сформулированная Фаваром и, независимо от него, Зюссом (см. Александров А. Д., Усп. мат. наук, 1949, 4, № 3 (31), 164). Вопрос о необходимых и достаточных условиях, которые надо наложить на функцию $F(\xi)$ для того, чтобы существовала соответствующая выпуклая поверхность, остается открытым. *И. М. Яглом*

1399. Об устойчивости изолированных ребристых точек на выпуклой поверхности при изгибании. Погорелов А. В., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 3 (55), 131—134

Показывается, что при изгибании гладкой выпуклой поверхности в классе выпуклых поверхностей может происходить нарушение гладкости в изолированных точках в виде появления ребристых точек. Существование таких поверхностей доказывается построением примера.

Строится выпуклая оболочка Φ_1 множества точек M_1, составленного из двух шаров с центрами $A_1(a,0,h)$, $\bar{A}_1(-a, 0, h)$ и радиусом $h/2$, двух точек $S_1(2a/3, 0, 0)$, $\bar{S}_1(-2a/3, 0, 0)$ и положительной полуоси z. Одной частью Φ_1 является цилиндр над плоскостью $z = h$, другой частью под этой плоскостью — выпуклая шапочка F_1; шапка F_1 — всюду гладкая, кроме отрезка $S_1\bar{S}_1$ оси x; удельная кривизна всюду ограничена, кроме точек S_1 и $\bar{S}_1$; край шапки имеет на каждом участке нулевой поворот. По теореме о «склеивании» А. Д. Александрова из шапки F_1 образуется замкнутая выпуклая поверхность $\tilde{F}_1$ с удельной кривизной, всюду ограниченной, кроме конических точек S_1 и $\bar{S}_1$, всюду выпуклая и гладкая, кроме точек S_1 и $\bar{S}_1$ при a достаточно большом по сравнению с h.

При помощи множества M_2 строится поверхность $\tilde{F}_2$, аналогично тому, как $\tilde{F}_1$ строилась при помощи M_1. Множество M_2 получается из M_1 присоединением точек $S_2(4a/9, 0, 0)$, $\bar{S}_2(-4a/9, 0, 0)$ и заменой S_1 и $\bar{S}_1$ шарами с центрами $A_2(2a/3, 0, \varepsilon_2)$, $\bar{A}_2(-2a/3, 0, \varepsilon_2)$ и радиусом $\varepsilon_2/2$. При достаточно малом ε_2 $\tilde{F}_2$ всюду гладкая, кроме конических точек S_2 и $\bar{S}_2$.

Последовательность выпуклых поверхностей F_n, имеющих ребро $S_n\bar{S}_n$, которое стремится к точке $O(0, 0, 0)$ при $n \to \infty$, сходится к предельной поверхности F всюду гладкой, кроме точки O, являющейся изолированной ребристой точкой.

Из каждой F_n по теореме о «склеивании» образуется замкнутая выпуклая поверхность $\tilde{F}_n$ (изометричная) с двумя коническими точками и гладкая в точке O. Предельная поверхность $\tilde{F}$ всюду гладкая. Окрестность точки O на $\tilde{F}$ допускает изгибание в окрестность точки O на F с нарушением гладкости в этой точке. *В. С. Люкшин*

1400 РЕЦ. Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей. Погорелов А. В., Киев, Изд-во АН УССР, 1952, 68 стр., 4 р. 45 к. [Рецензия: **Ефимов Н. В.,** Сов. книга, 1953, № 8, 6—8]

См. также: 1011, 1018 **РЕЦ**, 1019 **РЕЦ**, 1047, 1085, 1091 **РЕЦ**, 1103, 1106, 1114, 1197, 1203, 1252, 1411, 1419, 1426 **К**, 1502, 1508, 1512 **РЕЦ**

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1401. Решение задачи для уравнения смешанного типа методом сеток. Халилов З. И., Докл. АН Азерб. ССР, 1953, 9, № 4, 189—194

Для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (1)$$

где

$$\begin{cases} \theta(y) = 1 & \text{при } y > 0, \\ \theta(y) = -1 & \text{при } y < 0, \end{cases}$$

в области D, ограниченной в верхней полуплоскости линией L с концами $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, а в нижней — кусками L_1 и L_2 характеристик, рассматривается задача нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям

$$u|_L = \varphi, \qquad u|_{L_1} = \psi. \qquad (2)$$

Эта задача решается методом сеток.

Область эллиптичности уравнения (1) разбивается прямыми, параллельными осям x и y, на квадраты со стороной $h = 1/n$, и уравнение (1) заменяется условием, чтобы во внутренних точках решетки значение u_h было средним арифметическим от значений u_h в четырех соседних точках. В граничных точках решетки, примыкающих к L, u_h полагается равной φ.

Область гиперболичности ($y < 0$) разбивается на квадраты прямыми, идущими к оси Ox под углом $\pm\pi/4$ и выходящими из точек $(m/n, 0)$, $m = 0, 1, \ldots, n$. В ней уравнение (1) заменяется соотношением

$$u_h(x, y) - u_h\left(x + \frac{1}{2n}, y - \frac{1}{2n}\right) =$$
$$= u_h\left(x - \frac{1}{2n}, y - \frac{1}{2n}\right) - u_h\left(x, y - \frac{1}{n}\right).$$

Наконец, в точках решетки, принадлежащих AB, должны выполняться равенства

$$u_h\left(\frac{m}{n}, 0\right) = \frac{1}{2}\left[u_h\left(\frac{m}{n}, \frac{1}{n}\right) + u_h\left(\frac{m}{n}, -\frac{1}{n}\right)\right],$$

а в точках L_1 $u_h = \psi$.

Автор утверждает, что полученное таким способом u_h будет при достаточно малом h сколь угодно мало отличаться от истинного решения u, если последнее существует и четырежды дифференцируемо. Для решения алгебраической системы, определяющей u_h, указывается способ последовательных приближений, сходный с методом выметания в задаче Дирихле.

Дается резюме на азербайджанском языке.

О. А. Ладыженская

1402. Вычисление неустановившегося газового потока через пористую среду. Брус, Писман, Рачфорд, Райс (Calculations of unsteady-state gas flow through porous media. Bruce G. H., Peaceman D. W., Rachford H. H., Rice J. D), J. Petrol. Technol., 1953, 5, № 3, 79—92 (англ.)

В работе исследуются два способа решения конечно-разностным методом следующих задач:

1) Определение линейного потока, которое сводится к нахождению функции $P(x, t)$, удовлетворяющей при $x \in [0, 1]$ и $t \geqslant 0$ уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 P^2}{\partial x^2} \qquad (1)$$

и условиям

$$P\Big|_{t=0} = 1, \quad \frac{\partial P^2}{\partial x}\Big|_{x=0} = Q = \text{const}, \quad \frac{\partial P^2}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0; \qquad (2)$$

2) Определение радиального потока, изучение которого сводится к определению P для $x \in [-a, 0]$ и $t \geqslant 0$ из уравнения

$$e^{2x}\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 P^2}{\partial x^2} \qquad (3)$$

и начального и граничных условий типа (2).

Для линейного потока при первом способе $\frac{\partial P(x, t)}{\partial t}$ заменяется через

$$\frac{1}{\Delta t}[P(x, t + \Delta t) - P(x, t)], \text{ а } \frac{\partial^2 P^2(x, t)}{\partial x^2}$$

через

$$\frac{1}{\Delta x^2}\Delta^2 P^2(x, t) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\Delta x^2}[P^2(x + \Delta x, t) - 2P^2(x, t) + P^2(x - \Delta x, t)],$$

а граничные условия через

$$\frac{1}{\Delta x}[P^2(\Delta x, t) - P^2(0, t)] = Q$$

и $$\frac{1}{\Delta x}[P^2(1, t) - P^2(1 - \Delta x, t)].$$

Второй способ совпадает с тем, который был предложен референтом в 1948 г. и исследован им при решении задачи Коши для гиперболических систем, линейных и нелинейных (Ладыженская О. А., Уч. зап. ЛГУ, 1952, № 23). А именно

$$\frac{\partial^2 P^2(x, t)}{\partial x^2}$$

заменяется через

$$\frac{1}{2\Delta x^2}[\Delta^2 P^2(x, t + \Delta t) + \Delta^2 P^2(x, t)],$$

а остальные замены те же, что при первом способе. Несколько более сложные замены предлагаются для радиального потока. Для всех случаев замены проведен неймановский анализ ошибок (см. O'Brien, Hyman G., Kaplan S., J. Math. and Phys., 1951, 29, 223), из которого видно преимущество второго способа замены.

При второй замене приближения P_{ik}, $i = 1, \ldots, n$, для $t = k\Delta t$ определяются из нелинейной алгебраической системы. Авторы дают три способа приближенного решения этой системы и проводят сравнительный анализ их.

В работе приведен ряд диаграмм и результатов вычислений для различных значений $\frac{\Delta x^2}{\Delta t}$, Q и раз-

личных способов замены. Доказательство сходимости решений разностных уравнений к истинным решениям задачи не дается. *О. А. Ладыженская*

1403. Применение релаксационных методов для решения дифференциальных уравнений в пространстве трех измерений. II. Потенциальное обтекание профилей крыла. Аллен, Деннис (The application of relaxation methods to the solution of differential equations in three dimensions. II. Potential flow round aerofoils. Allen D. N. de G., Dennis S. C. R.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1953, 6, ч. 1, 81—100 (англ.)

Статья является продолжением работы тех же авторов, опубликованной ранее (Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1951, 4, 199—208).

Задача потенциального обтекания крыла несжимаемым потоком в трехмерном пространстве формулируется в терминах потенциала скоростей φ. Ищется функция φ, удовлетворяющая уравнению Лапласа и граничным условиям: $\partial\varphi/\partial\nu = 0$ на поверхности крыла и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \to U; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} \to 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} \to 0$$

при безграничном удалении от крыла.

Ввиду многозначности φ в состав границы области включается поверхность тока, сходящая с крыла; форма этой поверхности, неизвестная заранее, должна быть определена в результате расчета из условия равенства величин скорости на обеих ее сторонах (путем варьирования некоторой первоначально заданной формы этой поверхности). Вычислительный способ решения подобных задач был подробно описан ранее (Shaw F. S., Sothwell R. V., Proc. Roy. Soc., 1941, A178, 1—17; Southwell R. V., Vaisey G., Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1946, A240, 117—161).

Граничное условие $\partial\varphi/\partial\nu = 0$ удовлетворяется путем исключения значений в «фиктивных» узлах сетки (за пределами области), которые появляются при записи условия в разностной форме.

Приводятся результаты расчетов для бесконечно тонкой пластинки (двумерный случай) и для двух видов крыла в трехмерном пространстве. На схеме показаны полученные значения потенциала в точках неравномерной сетки, сгущающейся вблизи профиля. Сравнение вычисленных распределений циркуляции вокруг плоского сечения крыла и положений центра давлений сечения по размаху крыла с результатами, полученными иными способами, показывает хорошее совпадение.

Указана схема перехода в трехмерном пространстве от участков с более редкой к участкам с более густой сеткой и выведены формулы для вычисления «поправок» в точках переходной области.

Н. А. Рывлина

1404. О сходимости интерполяционного метода для обыкновенных дифференциальных уравнений. Карпиловская Э. Б., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 3(55), 111—118

Л.В. Канторович (Докл. АН СССР, 1934, 2, 532—535) предложил приближенный метод (интерполяционный метод) решения граничных задач, занимающий промежуточное положение между методом Галеркина и методом сеток. В реферируемой статье исследуется применимость интерполяционого метода к приближенному решению следующей задачи:

$$\frac{d^{2m}x}{dt^{2m}} - p_1(t)\frac{d^{2m-1}x}{dt^{2m-1}} - \cdots - p_{2m}(t)\,x - y(t) = 0;$$

$$x = \frac{dx}{dt} = \cdots = \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} = 0$$

при $t = a$, $t = b$.

Приближенные решения ищутся в виде

$$x'(t) = (t-a)^m (b-t)^m \sum_{k=1}^{n} c_k t^{k-1},$$

причем коэффициенты c_k определяются так, чтобы в выбранных точках $t_1, t_2, \ldots, t_n$ (узлах интерполяции) подстановка $x'(t)$ в левую часть дифференциального уравнения обращала ее в нуль.

В предположении, что коэффициенты рассматриваемого уравнения непрерывно дифференцируемы, показывается, что в случае выбора узлов Чебышева или узлов Гаусса системы уравнений, из которых определяются c_k, разрешимы при больших n. Для случая

$$\frac{d^r p_1}{dt^r}, \quad \frac{d^r p_2}{dt^r}, \ldots, \frac{d^r p_{2m}}{dt^r}, \quad \frac{d^r y}{dt^r} \in \mathrm{Lip}\,\alpha \quad (\alpha > 0)$$

устанавливается быстрота сходимости приближенных решений x' к точному x^* в случае узлов Чебышева

$$\sum_{k=0}^{2m} \max_{a \leqslant t \leqslant b} \left| \frac{d^k}{dt^k}(x^* - x') \right| = O\left(\frac{\ln^2 n}{n^{r+\alpha}}\right) (r \geqslant 0)$$

и в случае узлов Гаусса

$$\sum_{k=0}^{2m} \max_{a \leqslant t \leqslant b} \left| \frac{d^k}{dt^k}(x^* - x') \right| = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-1}}\right) \quad (r \geqslant 1).$$

Исследование сходимости интерполяционного метода основано на применении общей теории Л. В. Канторовича приближенных методов анализа (см. Усп. мат. наук, 1948, 3, № 6 (28), 89—185).

В конце статьи приведен пример задачи Коши, для которой расходится интерполяционный процесс решения по равноотстоящим узлам. Этот пример опровергает высказывавшееся утверждение (например, Фрезер, Дункан, Коллар, Теория матриц, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1950, 245) о равносильности интерполяционного метода и метода Галеркина.

М. А. Красносельский

1405. Численное решение системы дифференциальных уравнений. Приложение метода к расчету вращающейся оболочки. Микеладзе М. Ш., Прикл. математика и механика, 1953, 17, № 3, 382—386

Для численного решения системы линейных дифференциальных уравнений применяется метод решения линейных дифференциальных уравнений, предложенный Ш. Е. Микеладзе (Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений и их приложения к задачам теории упругости, Гостехиздат, М.—Л., 1951).

Этот метод состоит в следующем. Система дифференциальных уравнений

$$y''_\nu(x) = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}(x)\, y_\mu(x) + F_\nu(x), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

заменяется системой интегральных уравнений

$$y''_\nu(x) = F_\nu(x) + \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}(x)\, y_\mu(x_0) + (x - x_0) \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}(x)\, y'_\mu(x_0) + \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}(x) \int_{x_0}^{x} (x-t)\, y''_\mu(t)\, dt.$$

Значения функций $y''_\nu(x)$ в узлах $x_k = x_0 + kh$ находятся методом последовательных приближений; значение $y''_\nu(x_k)$, найденное k-ой итерацией, при $(k+1)$-ой и дальнейших итерациях не меняется. Интеграл вычисляется по формуле трапеций. При решении краевых задач часть величин $y_\nu(x_0)$, $y'_\nu(x_0)$ рассматривается в качестве параметров. Вопрос о точности приближенного решения не рассматривается. Приведен пример расчета вращающейся оболочки.

В. М. Курочкин

1406. Обобщение зейделевского итерационного процесса. Вейссингер (Verallgemeinerungen des Seidelschen Iterationsverfahrens. Weissinger Johannes), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 4, 155—163 (нем.)

Доказывается следующая основная теорема:

Пусть A — симметрическая матрица, соответствующая неотрицательной квадратичной форме. Тогда существует такое разложение $A = S - B_1 - B_2$, $B_2 = B'_1 + F$ (M' получается из M транспонированием), что $(S - B_1)^{-1}$ существует, где S — симметрическая матрица и $(S + F)$ — матрица, соответствующая положительно определенной квадратичной форме. Образуем при любых x_0 и r последовательность $x_{\nu+1} = Gx_\nu + r^*$, $G = (S - B_1)^{-1}B_2$, $r^* = (S - B_1)^{-1} r$. Тогда последовательность $y_\nu = x_{\nu+1} - x_\nu$ всегда сходится к решению уравнения $Ay = 0$, последовательность y_ν сходится к $y = 0$ тогда и только тогда, когда вектор r ортогонален ко всем решениям уравнения $Ay = 0$. Соответствующим выбором r можно получить любое такое y. Если существует $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = z$, то $Az = r$ и, обратно, любое такое z можно получить в виде $z = \lim_{\nu\to\infty} x_\nu$. Для сходимости последовательности x_ν (и тем самым для разрешимости уравнения $Ax = r$) необходимо и достаточно, чтобы вектор r был ортогонален ко всем решениям уравнения $Ay = 0$. Это утверждение верно при любом разложении матрицы A, удовлетворяющем условиям теоремы. В последнем параграфе полученные результаты естественным образом переносятся на линейные интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Автор стремится провести изложение, не используя теории определителей. В одном месте доказательство проведено нечетко. (Доказательство положительной определенности формы, соответствующей P, стр. 157, строка 21 сверху; из доводов автора непосредственно следует лишь неотрицательность этой формы.) Ряд опечаток ($P^* + A^*$ вместо $P^* + Q^*$ на стр. 158, строки 4 и 9 сверху, $R - G\,|\,1 <$ вместо $|R - G| < 1$ на стр. 158, строка 10 сверху) затрудняет чтение статьи. *А. А. Абрамов*

1407. Решение системы линейных уравнений по методу Кросса. Кострy, Борру (Resolução de sistemas de equações lineares pelo método de Cross. Kostro J., Borro L.), Técnica, 1953, **28**, № 230, 365—370 (порт.)

Описывается техника решения алгебраической линейной системы уравнений по методу Кросса (одному из вариантов релаксационного метода). Разобраны два примера. Для изучения теоретической основы метода, которому авторы придают большое значение, читатель отсылается к оригинальным работам.

В. И. Фаддеева

1408. Решение уравнений при помощи непрерывных дробей. Фрейм (The solution of equations by continued fractions. Frame J. S.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 5, 293—305 (англ.)

Рассматривается уравнение $\varphi(x) = 0$. Предполагается, что функция $\varphi(x)$ имеет достаточное количество непрерывных производных в окрестности корня ξ. Если x есть первое приближение к корню ξ, то разность $\xi - x$ представляется в виде непрерывной дроби

$$\varepsilon = \xi - x = \cfrac{a_1}{1 + \cfrac{a_2}{1 + \cfrac{}{1 + \cfrac{a_k}{1 + r_{k+1}}}}} = \frac{P_k + r_{k+1}P_{k-1}}{Q_k + r_{k+1}Q_{k-1}}.$$

Числители $a_1, a_2, \ldots, a_k$ можно определять по формулам

$$a_1 = \nu, \quad a_2 = \nu\beta, \quad a_3 = \nu\beta - \nu\gamma,$$
$$a_4 = \nu\beta - \nu\gamma\,(\gamma - \delta)\,/\,(\beta - \gamma),$$

где $\nu = -y/y'$, $\beta = y''/2y'$, $\gamma = y'''/3y''$, $\delta = y^{IV}/4y'$ и значения производных берутся в точке x. Дается также более удобная формула для отыскания числителей a_k:

$$(k+1)\frac{a_{k+1}}{\nu} = 2\frac{a_2}{\nu} + (k-2)\frac{a_{k-1}}{\nu} - \frac{a_k}{\nu} - \frac{d}{dx}\left(\ln\frac{a_k}{\nu}\right), \quad k \geq 2.$$

Показывается, что P_k/Q_k имеет порядок ν^{k+1}. Чтобы установить сходимость итерационной формулы

$$f_k(x) = x + \frac{P_k(x)}{Q_k(x)}$$

для отыскания ξ находится производная

$$f'_k(x) = (k+1)(-1)^k a_2 a_3 \ldots a_{k+1}/Q_k^2.$$

Дается оценка ошибки итерационной формулы. Для случая положительных числителей показывается, что функция P_k/Q_k дает лучшее приближение к ξ,

чем k-ая частичная сумма соответствующего степенного ряда. Если определить порядок сходимости итерационной формулы $x = f(x)$ как наибольшее число k такое, что

$$\lim_{x \to \xi} \frac{|\xi - f(x)|}{|\xi - x|^k} < \infty,$$

то, если $|f_k'(x)| < 1$, сходимость $f_k(x)$ имеет порядок $k+1$. Рассматриваются примеры. *Н. П. Жидков*

1409. О приближенном решении систем нелинейных уравнений. Давиденко Д. Ф., Украинский мат. ж., 1953, 5, № 2, 196—206

Рассматривается система уравнений

$$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \quad (1)$$

Предполагается, что при некотором значении параметра λ, $\lambda = \lambda_0$, известно ее решение: $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$.

Относительно функций f_k предполагается следующее:

1) все f_k определены и непрерывны в некоторой $(n+1)$-мерной области G изменения $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda$, содержащей точку $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_0)$;

2) существуют и непрерывны в G частные производные от этих функций по всем аргументам;

3) функциональный определитель

$$J = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)$$

в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda)$ отличен от нуля. Величины x_i рассматриваются как функции от λ и затем уравнения (1) дифференцируются по λ. Полученная система линейных уравнений разрешается относительно $dx_i/d\lambda$. Тогда

$$\frac{dx_i}{d\lambda} = \Delta_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) / \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) \quad (2)$$
$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

где Δ_i — определители, получающиеся из Δ заменой элементов i-того столбца свободными членами. Решение системы (1) будет решением системы дифференциальных уравнений (2), удовлетворяющим следующим начальным условиям: при $\lambda = \lambda_0$, $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$. Это решение отыскивается при помощи какого-нибудь метода численного интегрирования. В точке, где $\Delta = 0$, но $\Delta_i \neq 0$, рекомендуется от системы (2) перейти к системе

$$\frac{dx_i}{dt} = \Delta_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\frac{d\lambda}{dt} = \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda),$$

а затем вернуться к исходной.

Аналогичный прием рекомендуется, если $\Delta_i = 0$, $\Delta = 0$. Иногда в этих случаях при возвращении к системе (2) приходится менять направление интегрирования или знаки производных. Рассмотренный метод применим и в том случае, когда уравнения (1) параметра не содержат. В этом случае его нужно ввести таким способом, чтобы решаемая система получалась при некотором значении параметра, а при некотором другом его значении эта система легко решалась. Рассмотрены два примера. Вопросы сходимости не изучаются. Краткое изложение этих результатов опубликовано ранее (РЖМат, 1953, реф. 447).

Н. П. Жидков

1410. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений методом итераций. Бейтман (The solution of algebraic and transcendental equations by iteration. Bateman E. H.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 320, 96—101 (англ.)

Выводится из других соображений формула третьего порядка для приближенного решения уравнения $F(y) = 0$, полученная ранее Джорданом (Jordan W. B., Math. Tables and other Aids Comput., 1951, 5, № 35, 183). Даются оценки, примеры, геометрическая интерпретация. Разложением правой части основной формулы в степенной ряд получены для $F(y) = y^2, y^3$ формулы, не требующие деления на многозначные числа и поэтому удобные для вычисления корня с большой точностью. *М. Л. Бродский*

1411. Формулы механических квадратур с равными коэффициентами для кратных интегралов. Георгиев Г., Докл. АН СССР, 1953, **89**, № 3, 389—392

Приводятся формулы механических квадратур вида

$$\iint_R P(x, y)\, dx\, dy = \lambda \sum_{i=1}^{N} P(x_i, y_i), \quad (1)$$

где область интегрирования R выбрана так, что существуют интегралы

$$I_{kr} = \iint_R x^k y^r\, dx\, dy \quad (k \geqslant 0,\ r \geqslant 0,\ k + r \leqslant n).$$

Доказывается, что существует бесконечное множество формул типа (1), верных для любого полинома $P(x, y)$ степени не выше двух ($n = 2$), с минимальным числом членов $N = 3$, при этом $\lambda = I_{00}/3$, а координаты x_i, y_i удовлетворяют уравнениям

$$I_{00} F(x_k, y_k, 1; x_r, y_r, 1) = \begin{cases} 3, & \text{если } k = r, \\ 0, & \text{если } k \neq r; \end{cases}$$

здесь

$$F(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & z & x & y \\ \zeta & I_{00} & I_{10} & I_{01} \\ \xi & I_{10} & I_{20} & I_{11} \\ \eta & I_{01} & I_{11} & I_{02} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} I_{00} & I_{10} & I_{01} \\ I_{10} & I_{20} & I_{11} \\ I_{01} & I_{11} & I_{02} \end{vmatrix}.$$

Аналогичные формулы доказываются и для тройных интегралов. *В. А. Диткин*

1412. Коэффициенты для облегчения интерполирования и интегрирования линейных комбинаций экспоненциальных функций. Лью к (Coefficients to facilitate interpolation and integration of li-

near sums of exponential functions. Luke Yudell L.), J. Math. and Phys., 1953, 31, № 4, 267—275 (англ.)

Автор исходит из выражения коэффициентов функции $\sum_{j=0}^{n} C_j e^{-jx}$, принимающей значения f_i при $x = x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, в виде

$$C_j = \sum_{i=0}^{n} f_i A_{ij}^{(n)}.$$

Рассматривается случай равноотстоящих точек $x_i = ih$, при котором матрица коэффициентов $A_{ij} = A_{ij}^{(n)}$ оказывается симметрической. Для соответствующих формул интерполирования и квадратур

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} e^{-jx} \left\{ \sum_{i=0}^{n} f_i A_{ij}^{(n)} \right\}, \qquad (1)$$

$$\int_{ih}^{sh} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f_i B_i^{(n)}(s, r) \qquad (2)$$

даются таблицы коэффициентов $A_{ij}^{(n)}$, $B_i^{(n)}(n, 0) = B_i^{(n)}$ при $n = 2, 3, 4$ и при $h = 0,1;\ 0,2;\ \ldots;\ 1,0$ (для $n=2$ и 3 также при $h = 0,02;\ 0,05$).

Затрагиваются также вопросы интерполирования табличных значений по аргументу h и вопросы учета погрешностей формул. Установление остаточных членов связывается в статье с соответствующими вопросами в случае полиномиальной лагранжевской интерполяции. В частности, для формулы квадратур (2) имеется попытка использования метода точного интегрального представления остатка $R_n(f)$, трактуемого как линейный оператор. Но при этом автор считает возможным без более полного исследования вопроса применить интегральную теорему о среднем. Статья содержит указания относительно использования тех же таблиц в несколько иных случаях интерполирования и интегрирования. *Е. Я. Ремез*

1413. Построение последовательных производных для экспериментальных кривых и их сглаживание. Вернотт (La dérivation successive des courbes expérimentales, et son lissage. Vernotte Pierre), C.r. Acad. sci., 1953, 236, № 18, 1737—1739 (франц.)

Приводятся формулы для вычисления производных функций, полученных из эксперимента. Производная первого порядка y' в средней точке получается по формуле

$$y' = [(y_{N+1} + y_{N+2} + \cdots + y_{2N}) - (y_1 + y_2 + \cdots + y_N)] / N^2 h.$$

Здесь y_i — последовательные ординаты, h — расстояние между ординатами. Формула дает точные значения для производной, если функция на промежутке длиной $2Nh$ с центром в точке, для которой ищется производная, является многочленом второй степени. При аналогичных обозначениях вторая производная y'' в средней точке определяется по формуле

$$y'' = \{[(y_{N+1} + \cdots + y_{2N}) + (y_{2N+1} + \cdots + y_{3N})] - [(y_1 + \cdots + y_N) + (y_{3N+1} + \cdots + y_{4N})]\} / 2Nh.$$

Формула дает точные значения для производной, если функция на промежутке длиной $4Nh$ с центром в точке, для которой ищется производная, является многочленом третьей степени. Подобным же образом можно составить выражения и для производных более высоких порядков. Указан новый прием сглаживания функций. *Н. П. Жидков*

1414. Аппроксимация экспериментально установленных зависимостей простыми функциями. Шмидтмайер (Aproximace experimentálně zjištěných závislostí jednoduchými funkcemi. Schmidtmayer Josef), Electrotechn. obzor, 1953, 42, № 2, T7—T12 (чеш.)

Для определения вида функции, воспроизводимой по приближенным значениям в n точках, предлагается проводить испытание разностей и использовать специальные виды бумаги (например, логарифмическую). Для подбора параметров искомой функции применяется метод наименьших квадратов причем минимизируемые выражения искусственными методами линеаризуются относительно этих параметров. *М. Л. Бродский*

1415. Аналитическая и графическая интерполяция и экстраполяция. Варнум (Projecting data. Varnum Edward C.), Mach. Design, 1953, 25, № 3, 123—127 (англ.)

Излагаются простейшие методы аналитической и графической интерполяции и экстраполяции, а также графические методы, связанные с использованием бумаги с неравномерными координатными шкалами (например, логарифмической).

М. Л. Бродский

1416. Нормальные числа (таблица однозначных логарифмов для инженеров). Туффентзаммер, Шумахер (Normzahlen die einstellige Logarithmentafel des Ingenieurs. Tuffentsammer K., Schumacher P.), Werkstattstechn. und Maschinenbau, 1953, 43, № 4, 156—162 (нем.)

Сопоставление чисел $10^3 = 1000$ и $2^{10} = 1024$ приводит к равенству $2 \approx 10^{0,3}$ или $\lg 2 \approx 0,3$; почленное умножение на числа 2, 3, ..., 10 дает таблицу

x	1	1,2	2	16	4	256	8	32	64	512	1024
$\lg x$	0,0	2,1	0,3	1,2	0,6	2,4	0,9	1,5	1,8	2,7	3,0

Сравнение с более точными значениями десятичных логарифмов, хотя бы четырехзначными, показывает, что значения x надо несколько исправить.

Если расположить значения $\lg x$ в порядке возрастания мантисс и взять везде характеристику 0, получается следующая таблица однозначных логарифмов (ее правильнее было бы назвать таблицей значений показательной функции с основанием 10 или таблицей антилогарифмов):

NZ	1	1,25	1,6	2	2,5	3,15	4	5	6,3	8	10
lgNZ	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0

Числа верхней строки, т. е. округленные значения степеней 10 с показателями от 0,0 до 1,0 через 0,1 и называются нормальными числами (Normzahlen, сокращенно NZ). Кроме этой таблицы, обозначаемой знаком R10, применяется еще более краткая таблица R5, содержащая антилогарифмы чисел от 0,0 до 1,0 через 0,2, и более обширная таблица R20, содержащая антилогарифмы чисел от 0,0 до 1,0 через 0,05. Все эти нормальные числа легко получить посредством счетной линейки; если их запомнить, то грубо приближенные подсчеты при отсутствии линейки удобно производить в уме.

Статья содержит несколько примеров таких подсчетов, а также указания на многочисленные применения нормальных чисел в инженерной практике, особенно в практической работе конструкторов. Например, назначение размеров, во многих случаях в известных пределах произвольных, выгодно вести по нормальным числам; так, значения 30 и 60 лучше заменить значениями $32 = 4 \cdot 8$ и $63 = 6{,}3 \cdot 10$, представляющими собой произведения нормальных чисел. Статья содержит указания на литературу (немецкую). Указывается, что во Франции нормальные числа именуются числами Ренара.

В. М. Брадис

1417. Критерии применимости нормальных чисел. Галло (Criteri per l'applicazione dei numeri normali. Gallo Gennaro), Riv. ingegneria, 1953, **3**, № 2, 165—168 (итал.)

Нормальные числа серии R5 определяются как числа вида q^n, где $q = \sqrt[5]{10}$, n — любое целое число. Аналогично при q, равном $\sqrt[10]{10}$, $\sqrt[20]{10}$, $\sqrt[40]{10}$, получаются серии нормальных чисел, соответственно, R10, R20, R40 (см. реф. 1416).

Рассматривается следующая проблема образования «гаммы значений»: если надо изготовить серию конструктивных элементов или вообще каких-либо однородных изделий, отличающихся друг от друга значениями некоторой характерной для них величины X, которая допускает, вообще говоря, непрерывное изменение, то возникает вопрос о рациональном выборе серии X_1, X_2, X_3,... дискретных значений этой величины. Показывается, что в очень многих случаях в качестве таких «унифицированных» (стандартных) значений выгодно брать последовательные нормальные числа.

Наряду с этой проблемой выбора гаммы значений возникает новая проблема: установить, сколько изделий, характеризуемых каждым из этих унифицированных значений, надо изготовить. Рассматривается следующая задача: считая известной функцию $y = f(X)$, выражающую кривую распределения требуемого общего числа изделий N в зависимости от значения X до унификации, установить, чем следует заменить эту функцию после унификации, заменяющей каждое значение X ближайшим большим унифицированным значением, при условии, что общее изменение всего числа N изготовляемых изделий должно быть минимальным. В предположении, что избранные унифицированные значения X_1, X_2, X_3,... выражаются последовательными членами какой-либо геометрической прогрессии со знаменателем q, выведено уравнение

$$\int_{X_1}^{X_1 q} (X_1 q - X)\, f(X)\, dX = \int_{X_1 q}^{X_1 q^2} (X_1 q^2 - X)\, f(X)\, dX,$$

которому должна удовлетворять искомая функция $y = f(X)$, выражающая кривую распределения после унификации, и указано решение $f(X) = k/X^2$ этого уравнения (вопрос о единственности решения не рассмотрен). Имеется ряд указаний о случаях, когда применение нормальных чисел (одной или нескольких серий) в зависимости от характера кривой распределения до унификации показан или противопоказан.

В. М. Брадис

1418. Длина дуги полного эллипса. Салвиг (Circumference of ellipse. Salvig Einar), Engng News-Rec., 1953, **150**, № 11, 14 (англ.)

Указывается приближенная формула для длины C дуги полного эллипса с полуосями a и b:

$$C = \pi [3(a + b) - \sqrt{(3a + b)(3b + a)}],$$

дающая ошибку 0,392%.

1419. Построение дуг, касательных к окружностям. Фридсон (Constructing arcs tangent to circles. Freedson Joseph), Machinery (London), 1953, **82**, № 2107, 626—627 (англ.)

Даны три примера, иллюстрирующие предыдущую статью автора (Machinery, 1951, **78**, 684—726).

Н. П. Жидков

1420 РЕЦ. Численный анализ. Хартри (Numerical analysis. Hartree D. E., pp. 287, Clarendon Press, Oxford, 1952) [Рецензия: Буковичч (Bukovics E.), Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 25/26, 44—45 (нем.)]

1421 РЕЦ. Графические таблицы. Фёльм (Graphische Tafeln. Völlm E., Herausgegeben von Ed. Aerni-Leuch, Bern, 1953) [Рецензия: Кюнци (Künzi H. P.), Elem. Math., 1953, **8**, № 4, 95—96 (нем.)]

1422 РЕЦ. Прикладная номография. Ч. 1. Кислер (Angewandte Nomographie. Teil I. Kiessler F., S. 135, 143 Zeichnungen und Zahlentaf. Kart., Essen, Girardet, 1952, DM15.60, Halbleinen DM18) [Рецензия: Мор (Mohr E.), Konstruktion, 1953, **5**, № 1, 31 (нем.)]

ТАБЛИЦЫ

1423. Групповая проверка 61-значных таблиц десятичных логарифмов, составленных Петерсом и Штейном, Калле и Паркхерстом. Улер (Omnibus checking of the 61-place table of denary logarithms compiled by Peters and Stein, by Callet and by Parkhurst. Uhler Horace S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 6, 533—537 (англ.)

Описывается работа, проведенная для выявления ошибок в 61-значных таблицах десятичных логарифмов, помещенных в приложении к 10-значным таблицам логарифмов Петерса и Штейна (Zehnstellige Logarithmentafel, Erster Band, Herausgegeben von Reichsamt für Landesaufnahme unter wissenschaftlicher Leitung von Prof. Dr. J. Peters. Berlin, 1922).

Вычислялась сумма группы взятых из таблиц логарифмов последовательных целых чисел, а для контроля этой суммы применялась формула Стирлинга. Автор указывает четыре ошибки в 58 или 59 знаке (для логарифмов 227, 839, 1009 и 1097), из которых некоторые были известны ранее, а также три ошибки на единицу последнего знака, обнаруженные при пересчете отдельных значений. Можно считать, что проверкой выявлены все ошибки, кроме ошибок в последнем знаке.

Отмечается, что источником ошибок являются известные таблицы Калле, откуда 61-значные логарифмы были без проверки перенесены в таблицы Петерса и Штейна, а также в американские астрономические таблицы Паркхерста. *К. А. Семендяев*

1424. Два новых простых числа Мерсенна (Two new Mersenne primes. D. H. L.), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, **7**, № 41, 72 (англ.)

Продолжается работа, описанная в Math. Tables and other Aids Comput., 1952, **6**, 61, 204. Два простых числа Мерсенна: $2^{2203} - 1$ и $2^{2281} - 1$, были найдены на машине СВАК (SWAC) 7 и 9 октября 1952 года. Время, потребовавшееся для каждого из этих вычислений, составляет 1 час. Таким образом, сейчас известны 17 простых чисел Мерсенна, даваемые формулой $2^n - 1$ при $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203$ и 2281.

1425 К. Пятизначные таблицы логарифмов. Изд. 6-ое, 194 стр., Воен. изд-во, М., 1953. 8 р. 90 к.

Воспроизведены почти все таблицы, которые были даны в книге акад. С. П. Глазенапа «Таблицы логарифмов с пятью десятичными знаками», выдержавшей в начале XX в. 10 изданий, а именно следующие: таблица логарифмов целых чисел от 1 до 10800 через 1; таблица логарифмов 6 тригонометрических функций от 0° до 90° через 1′; таблицы для вычисления логарифмов сумм и разностей, дающие значения

$$\sum = \lg(a + b) - \lg a \quad \text{и} \quad \Delta = \lg a - \lg(a - b)$$

в зависимости от значений $R = \lg a, b$, взятых от 0 до 5 при разных ступенях (табличные значения перечисленных функций взяты с 5 десятичными знаками); таблица точных квадратов чисел от 0,00 до 9,99 через 0,01; таблица квадратных корней из чисел от 1,0 до 49,9 через 0,1 и от 50 до 99 через 1, дающая корни с 3 десятичными знаками; таблица длины дуг круга в частях радиуса, дающая с 7 десятичными знаками радианную меру дуг от 0° до 180° через 1°, от 0′ до 60′ через 1′, от 0″ до 60″ через 1″; таблица четырехзначных логарифмов чисел от 100 до 999 через 1 и четырехзначных антилогарифмов для значений аргумента от 0,000 до 0,999 через 0,001; таблица перевода мер и некоторые другие мелкие таблицы.

Новыми, по сравнению со сборником С. П. Глазенапа, являются: таблица пятизначных логарифмов синуса и тангенса углов от 0° до 1° через 1″ и углов от 1° до 8° через 10″; таблица тригонометрических функций углов, выраженных в делениях угломера; расширенная таблица значений 6 тригонометрических функций, дающая с 4 десятичными знаками натуральные значения этих функций для углов от 0° до 90° через 10′; таблица плотностей. Таблица формул (гониометрия, плоская и сферическая тригонометрия, ряды) воспроизведена без изменения. Отметим, что на титульном листе книги фамилии С. П. Глазенапа нет, но в предисловии отмечается, что в основу книги приняты упомянутые в начале реферата его таблицы. *В. М. Брадис*

1426 К. Таблицы площадей сфероидических трапеций. 47 стр., Госэнергоиздат, М.—Л., 1953

В таблицах даны выраженные в квадратных километрах численные значения площадей сфероидических трапеций, образованных меридианами и параллелями на сфероиде Красовского для широт от экватора до полюса. Таблицы состоят из девяти разделов:

В таблице I даны значения упомянутых площадей трапеций, ограниченных дугами в 1′. Аргументом является полусумма широт (φ), ограничивающих сфероидическую трапецию. Значения φ изменяются в пределах от 90° до 0° через 1′. Значения площадей даны с тремя знаками после запятой, причем вполне допустима линейная интерполяция в пределах данной точности.

В таблице II даны значения площадей, ограниченных дугами в 5′. Здесь значения аргумента φ меняются в прежних пределах через 5′.

Таблица III содержит площади трапеций, ограниченных дугами в 10′, φ меняется от 90° до 0° через 10′.

В таблицах IV, V, VI, VII, VIII, IX имеются значения площадей трапеций, ограниченных дугами в 30′, 1°, 2°, 3°, 5°, 10°. Соответственно изменяются значения φ в пределах от 90° до 0°. Точность таблиц I, II, III — 3 десятичных знака, IV, V — 2 десятичных знака, VI, VII — один десятичный знак, VIII, IX — одна единица.

Таблицы служат для вычисления площадей по топографическим картам более точным способом, чем это делалось до сих пор. Внутри измеряемой территории выделяются фигуры, ограниченные отрезками меридианов и параллелей. Площади этих фигур находятся в данных таблицах. Площади оставшихся фигур могут быть определены прежними методами (планиметром, палеткой, взвешиванием). *М. А. Томсон*

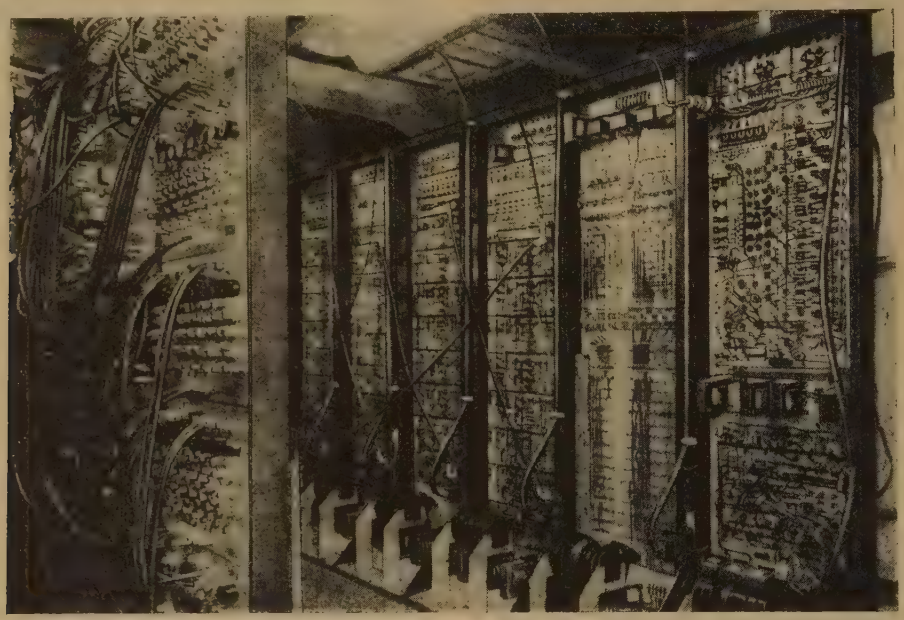
1427 РЕЦ. Функции Бесселя. Функции положительного целого порядка. Ч. II. Бикли (Bessel functions: Functions of positive integer order. Part II. Bickley W. G., pp. 255, N. Y., Cambridge Univ. Press, 1952, 11.00 doll.) [**Рецензия:** Тилман (Thielman Henry P.), Science, 1953, **117**, № 3042, 419 (англ.)]

См. также: 1010, 1011, 1061 К, 1076 РЕЦ, 1217 РЕЦ, 1223 РЕЦ, 1306, 1316, 1346, 1449

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

1428. Специализированная цифровая счетная машина ВВС США и фирмы «Фэйрчайлд». Стоун (The USAF-Fairchild specialized digital computer. Stone J. J.), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, 7, № 41, 35—37 (англ.)

Описывается специализированная электронная цифровая счетная машина СПЭК (SPEC — Special Purpose Electronic computer, см. фото), которая была спроектирована и построена военно-воздушными силами США и фирмой «Фэйрчайлд» (Fairchild) в связи с работами по проекту НЭПА (NEPA— Nuclear Energy for the Propulsion of Aircraft — ядерная энергия для движения самолетов) в 1950 г. в Окридже. Машина предназначена для решения больших систем (до 300 неизвестных) линейных алгебраических уравнений при помощи итерационного метода Гаусса — Зейделя.



Для решения система преобразуется к виду:

$$X_i = \sum_{j=1}^{j=N} A_{ij} X_j + C_i,$$

где $A_{ii} = 0$, N — число уравнений в системе.

Машина оперирует с 4-разрядными десятичными числами с фиксированной запятой. Приведена блок-схема машины. Машина состоит из арифметического узла, блока управления, 2 запоминающих блоков на магнитных лентах и печатающего устройства. Короткая бесконечная магнитная лента предназначена для запоминания неизвестных.

Длинная магнитная лента содержит коэффициенты, константы и соответствующие инструкции.

Арифметический узел состоит из множительного устройства и накапливающего счетчика.

Неизвестные и коэффициенты синхронно считываются с магнитных лент и одновременно подаются на два входа множительного устройства.

Образующиеся частные произведения добавляются (вычитаются) к содержимому счетчика, в котором накапливается сумма произведений. Для получения произведения двух 4-разрядных десятичных чисел требуется около 400 мсек. Счетчик имеет 8 десятичных разрядов. Чтобы уменьшить ошибку, округление производится только перед выводом суммы произведений из накапливающего счетчика. Все операции производятся в двоичной системе с использованием «кода с излишком три».

Полученное в счетчике новое значение неизвестного вводится во временное запоминающее устройство. Оттуда оно перезаписывается в соответствующее место на короткой магнитной ленте согласно с инструкцией, помещенной на длинной ленте.

Машина может также использоваться для обращения и перемножения матриц, численного интегрирования, отыскания коэффициентов Фурье. По окончании итерации результат печатается.

Полное количество ламп в машине — 2206, причем более половины из них диоды типа 6AL5, используемые в дешифраторах. *Н. Я. Матюхин*

1429. Вычисления с учетом порядков на машине ЭДСАК. Брукер, Уилер (Floating operations on the EDSAC. Brooker R. A., Wheeler D. J.), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, 7, № 41, 37—47 (англ.)

Отмечаются трудности, возникающие при программировании вычислений для быстродействующих вычислительных машин, работающих с фиксированной запятой. Предлагается использовать в этом случае специальную арифметику, в которой числа представляются в виде пары чисел a и r, где a — цифровая часть, r — порядок числа $x = a \cdot 10^r$; a и r изменяются в определенных границах. При таком представлении каждое число занимает две ячейки памяти.

Выполнение действий над числами осуществляется при помощи «команд», которые вызывают подпрограммы, сначала преобразующие числа в пару (a, r), а затем производящие нужные операции. Бо́льшая затрата времени на производство операций компенсируется упрощением программирования, сокращением числа команд и возможностью обходиться без масштабных множителей, необходимых при вычислениях с фиксированной запятой.

Дано подробное описание команд, применяемых на машине ЭДСАК, и приведен пример использования этих команд. Авторы ссылаются на книгу Уилкс М. В., Уилер Д. И., Гилл С., Составление программы для электронных счетных машин, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953. *Н. П. Жидков*

1430. Микропрограммирование и расчет схем управления в электронной цифровой вычислительной машине. Уилкс, Стриндже р (Microprogramming and the design of the control circuits in an electronic digital computer. Wilkes M. V., Stringer J. B.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, ч. 2, 230—238 (англ.)

Описывается метод проектирования схем управления в электронной вычислительной машине, позволяющий производить изменение или дополнение выполняемых машиной команд посредством так называемого микропрограммирования. Идея этого метода заключается в том, что отдельная команда, выполняемая машиной, может быть разбита на некоторую последовательность более элементарных операций, называемых микрооперациями. Микрооперации осуществляются посредством микрокоманд, составляющих микропрограмму. В статье дается описание такого метода управления для машины параллельного типа. Управление такой машиной осуществляется посредством блока регистров управления и блока микроуправления. Блок микроуправления состоит из дешифраторной пирамиды, двух регистров и двух матриц, построенных из диодов. Конфигурация диодов в этих матрицах зависит от заданного набора команд, выполняемых машиной. Описание работы блока иллюстрируется скелетной схемой. Дается пример микропрограммы для машины одноадресного кода, выполняющей обычные операции. Рассматриваются способы осуществления операций, требующих различного времени для их выполнения. Указывается, что такая система управления требует увеличения оборудования. Например, машина параллельного типа с 40 двоичными разрядами в арифметическом устройстве, осуществляющая 256 микрокоманд, потребует увеличения оборудования на 15%. За счет применения микроподпрограмм может быть уменьшено число микрокоманд. Например, одна и та же микроподпрограмма может быть использована как для сложения чисел с учетом порядков, так и для умножения чисел. Отмечается, что микропрограммирование для машин последовательного типа является несколько более сложной задачей, которая может быть решена посредством добавления третьей матрицы диодов в блоке микроуправления. *В. И. Шестаков*

1431. Прошедшее, настоящее и будущее счетных машин. Мак-Вильямс (Computers — past, present, and future. MacWilliams W. H., Jr.), Electrical Engng, 1953, **72**, № 2, 116—121 (англ.)

Статья представляет собой краткий обзор. Автор указывает, что счетные машины разделяются на два основных типа — машины непрерывного счета (моделирующие устройства) и дискретного счета (цифровые машины). Машины непрерывного счета просты по своему устройству; они удобны для качественной оценки задачи, для инженерных расчетов. Цифровые машины более универсальны и имеют большую точность; они удобны, в частности, в том случае, когда задача резко меняется в процессе решения. Развитие простых способов преобразования непрерывных данных в цифровую форму создает тенденцию разработки машин, содержащих и те и другие элементы.

Современные машины непрерывного счета обычно имеют точность порядка 10^{-3}, труднее получить точность в 10^{-4}, предельная точность — 10^{-5}. Крупные цифровые машины могут давать точность порядка 10^{-13}.

Важным признаком, характеризующим счетную машину, является ее способность вести расчет величин, зависящих от времени, в масштабе 1:1 или в «истинном масштабе времени». Счетные машины, обладающие этим свойством, могут быть использованы для целей управления различными процессами, напр. химическими; для работы совместно с навигационными приборами на самолете и т. п.

Машины непрерывного счета в прошлом веке были чисто механическими. В 1910—1920-х годах в машины был введен электропривод; в 20-х годах этого столетия механические детали стали заменяться электрическими (реле, лампами, а затем, в последнее время, кристаллическими диодами и триодами).

Первые попытки применения машин непрерывного счета для автоматического управления, в частности управления орудиями, относятся ко времени первой мировой войны.

Первые электрические машины непрерывного счета преследовали, в основном, цели измерения (автоматические измерительные мосты и потенциометры). Значительная часть их предназначалась для решений уравнений Лапласа; таковы, например, устройства, использующие плохо проводящие жидкости и потенциальные зонды. Первые машины работали на постоянном токе и решали задачи для условий установившегося режима реальных объектов. Современные машины описывают и переходные процессы.

В настоящее время техника машин непрерывного счета хорошо разработана. Значительно увеличилась точность машин непрерывного счета и расширился круг решаемых ими задач с появлением усилителей с обратной связью. Характерные примеры современного применения их: управление химическими процессами, управление станками, взлетом и посадкой самолетов на аэродромах. Скорость работы некоторых из них очень высока, например, машина «Тайфун» представляет движение управляемого снаряда в масштабе истинного времени. В дальнейшем, очевидно, будут вестись работы по увеличению точности

работы и уменьшению размеров машин непрерывного счета; будет расширяться также область их применения.

Цифровые машины появились в середине прошлого столетия, они также были чисто механическими. В конце прошлого столетия в счетных машинах стали употребляться перфокарты. С 20-х годов этого столетия стали использоваться реле, радиолампы, а затем кристаллические диоды и триоды.

Развитие цифровых машин в течение последних ста лет происходило в колоссальных масштабах. Машины стали работать быстрее, проделывать значительно бо́льшую работу и стали более универсальными.

Крупным шагом вперед являются построенные в последнем десятилетии первые большие универсальные машины, в частности электронная машина ЭНИАК (построенная Пенсильванским университетом для расчета траекторий бомб и снарядов). После окончания второй мировой войны была начата постройка ряда крупных электронных цифровых машин. Большинство из них уже работает.

Основное отличие современных счетных машин от более старых образцов заключается в запоминающих устройствах (памяти); в современных машинах для получения большой емкости памяти при малом времени выборки употребляются магнитные барабаны, магнитная лента и электронолучевые трубки. В настоящее время разрабатывается новая группа машин с учетом опыта эксплуатации существующих. Вводятся новые типы запоминающих устройств, включая память на ферроэлектриках и магнитных сердечниках. Большое значение в этих машинах имеют кристаллические триоды.

Интересные результаты дало появление большого количества малых счетных машин коммерческого типа, основанных на использовании перфокарт и магнитных барабанов. Эти машины по своему назначению соответствуют обычным малым настольным машинам, но работают значительно быстрее последних. Они могут быстро оперировать с большими числами, а стоимость их во много раз меньше стоимости больших электронных цифровых машин.

Среди современных задач в области цифровых электронных машин особенно важна проблема надежности. Это относится и к гражданским и к военным установкам. Существует два пути повышения надежности работы счетных машин — создание качественных деталей, работающих без погрешностей, и создание специального автоматически работающего проверочного оборудования, которое обнаруживает ошибки, возвращает машину назад и заставляет ее вновь пересчитывать задачу, сохраняя верные данные, которые были сосчитаны до возникновения ошибки.

Надлежащие результаты могут быть получены только при сочетании этих двух методов. Если возникающие ошибки редки и не связаны между собой, то самопроверка и пересчет занимают немного времени. Автор указывает, что, в частности, для машин, работающих в истинном масштабе времени, существенно, чтобы счетное устройство, в течение 99% рабочего времени работающее точно, а в оставшийся 1% — делающее ошибки, все же давало бы точность, близкую к нормальной. Счетная машина, по образному выражению автора, должна быть подобной пианисту, который аккомпанирует певцу,— он должен играть верно почти все время; несколько неверных нот допустимы, аккомпаниатор не должен из-за этого бросать игру. Требование поддержания темпа работы в истинном масштабе времени легче всего обеспечить в тех случаях, когда скорость машины настолько велика, что допускает производство повторных пересчетов без пропуска очередного шага.

Существует противоречие между возможностями машины и оператора, который обслуживает машину. Арифметическое устройство машины может работать очень быстро. От максимального его использования зависит эффективность работы всей машины. Эффективность можно повысить надлежащим составлением программ. В настоящее время развитие техники программирования идет по двум путям:

1. Путем создания библиотеки программ и подпрограмм, из которой нужная программа или подпрограмма может быть легко извлечена в надлежащий момент. Применение этого способа облегчается, если удается коды команд записывать в инвариантной форме так, что переход к новой задаче осуществляется лишь заменой произвольных постоянных в исходных данных.

2. По второму пути пошла фирма «Белл» (Bell Telephone Laboratories) при конструировании своей машины «Модель VI». Программы и подпрограммы более или менее постоянно закоммутированы в этой машине. Оператор вводит в машину лишь код, обозначающий целый комплекс программ, остальное происходит автоматически. Так, например, введение кода A13 может повлечь за собой производство 4000 отдельных операций. Этот способ значительно разгружает оператора.

Автор считает, что в дальнейшем будут развиваться как моделирующие устройства, так и цифровые машины. Наиболее ясно определившиеся тенденции: уменьшение размеров за счет миниатюризации деталей (включая машины, целиком состоящие из кристаллических диодов и триодов); увеличение точности моделирующих устройств; увеличение скоростей работы как моделирующих устройств, так и цифровых машин; усовершенствование устройств для ввода и вывода данных.

Продолжение ведущихся сейчас математических исследований должно привести к разъяснению поведения ошибок округления и проблем сходимости решений разностных уравнений к решениям дифференциальных.

Существующие и разрабатываемые системы памяти большой емкости позволяют применить счетные машины для разрешения других проблем, среди которых можно назвать обслуживание библиотек. Цифровая техника уже давно применялась для управления производственными установками (например, станки Жаккарда). Сейчас ее применяют для управления фрезерными станками. Управление сложными химическими процессами долгое время было областью применения устройств непрерывного действия. Теперь есть признаки перехода на цифровую технику, которая позволит ввести более гибкое программирование.

По мнению автора, машины дискретного счета несомненно будут применяться для перевода с одного языка на другой.

Примечание референта. Автор утверждает, что первый дифференциальный анализатор был построен Ванневаром Бушем в 1925 г. В действительности, как известно, первую машину для решения дифференциальных уравнений (дифференциальный анализатор) построил академик А. Н. Крылов в 1911—1914 гг. *Л. В. Кутуков*

1432. Гёттингенские электронные счетные машины. Бирман, Биллинг, Хопман, Шлютер (Die Göttinger elektronischen Rechenmaschinen. Biermann L., Billing H., Hopmann W., Schlüter A.), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 1—2, 48—60 (нем.)

В первой части статьи дается краткий обзор работ по счетным машинам в Гёттингене. Во второй части описана счетная машина G1 (РЖМат, 1953, реф. 479); она содержит приблизительно 500 электронных ламп и 400 реле. В машине могут быть представлены 32-разрядные двоичные числа, соответствующие десятичным числам в пределах $\pm 7{,}999\,999\,999$; действия производятся с фиксированной запятой. Машина работает по последовательному принципу, имея отдельные счетные устройства для сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня; имеется также устройство для преобразования чисел из десятичной системы в двоичную и для обратного преобразования.

Запоминающим устройством является магнитный барабан диаметром 8,8 *см*, длиной 17 *см*, вращающийся со скоростью 3000 об/мин. На нем записываются в качестве постоянных 26 двоичных чисел по 32 разряда; остальная часть поверхности барабана используется для запоминания промежуточных результатов при работе счетных устройств.

Управление циклически повторяющимися операциями производится при помощи бесконечной перфорированной ленты, которая является дополнительным запоминающим устройством; на ленте могут пробиваться и вновь вводится в вычисления промежуточные результаты. Машина рассчитана на работу 4 лент.

Операции выполняются по мере введения с перфорированной ленты или ручного клавишного механизма соответствующих команд программы. Машина может выполнять 12 операций над заданными заранее числами и 13 (несколько отличных от них) — над числами, запоминаемыми в процессе вычислений (приведена таблица всех операций). Команды воспринимаются системой реле.

Время выполнения простых операций менее 0,15 сек., сложные операции (умножение, деление, извлечение квадратного корня) вводят блокировку приема последующих команд во время вычислений. Умножение двух записанных в процессе решения на барабане чисел занимает около 0,9 сек. Приведены полная схема решения и программа для простой вычислительной задачи. *Н. И. Бродович*

1433. Состояние разработки в Германии вычислительных машин с программным управлением. Оверхофф (Staud der Entwicklung programmgesteuerter Rechenmaschinen in Deutschland. Overhoff Gerhard), Phys. Blätter, 1953, 9, № 1, 31—36 (нем.)

В начале статьи даются общие сведения об автоматических машинах. Затем сообщается о немецких работах.

В Институте практической математики Высшей технической школы в Дармштадте строится под руководством А. Вальтера электронная вычислительная машина.

Машина работает по двоично-десятичной системе. Вычисления ведутся с учетом порядков, с 12 десятичными цифрами и одним двоичным разрядом для знака. Порядки в двоичном представлении меняются от — 63 до + 63. Таким образом область допустимых чисел в десятичной системе простирается от 10^{-19} до 10^{+19}. Программа вводится на перфоленте, читающее устройство оптико-электрическое. Арифметическое устройство построено на селеновых выпрямителях, германиевых диодах и сопротивлениях. Время сложения 0,6 мсек. Запоминающее устройство состоит из двух частей. Главное устройство — магнитный барабан на 10000 десятичных чисел. Дополнительное запоминающее устройство на 5000 магнитостатических катушек предназначено для сокращения времени выборки (см. реф. 1460). Время выборки с магнитного барабана составляет 10 мсек. Машина находится в постройке, опытное магнитостатическое запоминающее устройство на 50 катушек работает.

В этом же институте построена маленькая демонстрационная релейная машина последовательного типа с 4 встроенными программами.

В приборном Институте общества М. Планка в Гёттингене (Institut für Instrumentenkunde in der Max-Planck Gesellschaft, Göttingen) строится под руководством Биллинга электронная машина G2; числа в ней представляются в двоичной системе с 50 двоичными значащими цифрами. Основное запоминающее устройство — магнитный барабан, делающий 50 об/сек. Постройка этой машины должна быть окончена в 1953 г. Сравнительно давно работает машина G1 упрощенной конструкции со значительно меньшими возможностями (см. реф. 1432).

В Нёйкирхене фирмой «Цузе» (Zuse-K.G.) изготовлена универсальная вычислительная релейная машина Z5 для оптического завода «Лейц» в Вецларе. Время сложения в этой машине 25 мсек. Там же изготовляется устройство для автоматического приготовления вычислительных программ. В статье приведены краткие сведения о машинах Цузе Z1, Z2, Z3, Z4 и их использовании. Отмечается, в частности, что уже в 1941 г. для немецкого Авиационного исследовательского института DVL (Deutsche Versuchanstalt für Luftfahrt) была построена вычислительная машина Z3 — первая в мире машина с программным управлением. Эта релейная машина, имеющая 2600 электромагнитных реле, работала по двоичной системе с учетом порядков и использовалась для расчетов по флаттеру самолетов. *Л. А. Абрамов*

1434. Вычислительные машины с программным управлением. Эккер (Programmgesteuerte Rechengeräte. Ecker G.), Kosmos, 1953, **49**, № 1, 25—29 (нем.)

Для решения сложных вычислительных задач в области науки и техники разработаны моделирующие устройства и цифровые счетные машины-автоматы. В Германии в Институте практической математики Дармштадтской высшей технической школы уже около 10 лет используется машина для решения дифференциальных уравнений Фирма «Шоппе и Фезер» (Schoppe und Faeser) построила моделирующее устройство, названное «интегромат», которое имеет свойства, в некоторых отношениях аналогичные свойствам цифровых машин. Достоинства моделирующих устройств — эксплуатационная надежность и простота решения задач. Недостатки — ограниченные возможности и точность.

Цифровые машины с программным управлением должны иметь: 1) запоминающие устройства для

запоминания данных и программы вычислений; 2) арифметические устройства, выполняющие 4 действия арифметики; 3) входные и выходные устройства. Машины должны иметь возможность автоматически определять дальнейший ход вычислительного процесса на основе результатов промежуточных вычислений.

В качестве запоминающих устройств используются триггерные схемы, ртутные трубки, магнитные и электростатические устройства. Недостаток ртутных трубок (использованных, например, в машине ЭДСАК) в большом времени выборки необходимого числа; кроме того емкость трубки невелика. Магнитные барабаны хорошо себя зарекомендовали; они обладают большой емкостью при относительно малом времени выборки и уступают только электростатическим запоминающим устройствам, емкость которых однако меньше. Указывается, что американцы имеют около 15 различных машин этого типа. Наиболее старая из них — ЭНИАК, а новейшая — МАРК IV. Хорошо оправдали себя машины ИАС (IAS) и ОРДВАК (ORDVAC). Имеются и такие, которые известны как дефектные конструкции; такова, например, машина СВАК (SWAC). Для характеристики этих машин указывается, что ОРДВАК и ИАС стоят от 0,5 до 0,75 млн. долларов, а эксплуатация их обходится в 3000 долларов в месяц.

Одна из лучших современных машин, по мнению автора,— английская „Ферранти" (Ferranti) (фото). В ней имеется как магнитное, так и электростатическое запоминающее устройство. Она содержит 4000 ламп, 2500 конденсаторов, 1500 сопротивлений и 100 000 контактов. Емкость магнитного запоминающего устройства 32 500 двадцатизначных двоичных чисел. Имеется 8 электростатических трубок на 1280 двоичных цифр каждая. Хотя машина и не является самой быстрой, зато, как указывает автор, она, повидимому, самая надежная. Указывается, что сложение двух двенадцатизначных десятичных чисел происходит за 1 *мсек*, а умножение — за 3 *мсек*.

Указываются различные применения электронных счетных машин и отмечается, что несмотря на свои успехи американцы недовольны достигнутыми результатами, так как все их установки эксплуатационно мало надежны. Примерно $^3/_4$ рабочего времени они простаивают из-за различных причин. Сейчас ведется работа по созданию маленьких, более медленных, но более надежных машин.

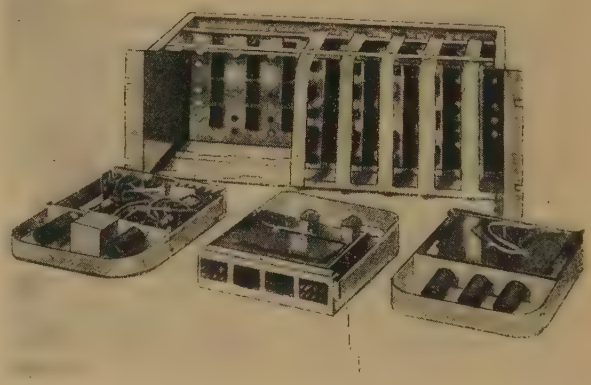
В Германии, в Гёттингене созданы две счетные машины G1 и G2. Обе машины с магнитным барабаном. Бо́льшая из них — G2 сравнима с наименьшей из американских машин — КАЛДИК (CALDIC); она недавно закончена и работает удовлетворительно. Кроме того, с 1935 г. над созданием электромеханических машин работает фирма «Цузе» (Zuse). Лучшая ее модель Z5 выпуска 1950 г. используется в Высшей школе в Цюрихе. В Институте практической математики Дармштадтской высшей технической школы ведутся работы по созданию счетных машин, обладающих и большими возможностями, и большой надежностью.

Приведены фотографии отдельных устройств машины „Ферранти". *Л. И. Гутенмахер*

1435. Новая цифровая вычислительная машина (A new digital computor), Electronic Engng, 1953, 25, № 303, 201 (англ.)

Вычислительная машина ЭЛЛИОТ-401 (Elliott/N. R. D. C. computor 401), Electronic Engng, 1953, 25, № 303, 213—214 (англ.)

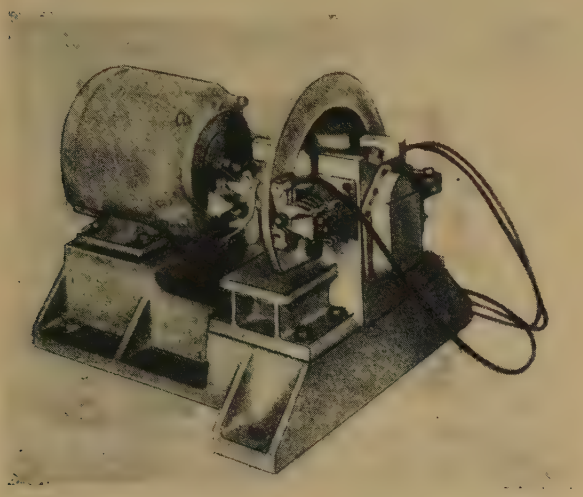
Описана универсальная быстродействующая электронная машина «401», построенная фирмой «Эллиот» (Elliott Brothers, London) для «Национальной корпорации по развитию исследований» (N. R. D. C. — National Research Development Corp.).



Фиг. 1

Вследствие применения ограниченного числа стандартных сменных блочков (фиг. 1) машина требует сравнительно небольших затрат на постройку и эксплуатацию. Размер ее 3,1 × 0,6 × 2,25 *м*. Пульт управления и контрольный пульт выполнены в виде самостоятельных узлов. В машине 500 ламп; имеется магнитное запоминающее устройство на оксидированном диске диаметром 22,5 *см*, вращающемся со скоростью 4500 об/мин. (фиг. 2). Плотность размещения записи на диске — 64 двоичных разряда на 1 *см*, время выборки одного разряда — 3 *μ сек*. На каждой дорожке диска расположено 128 32-разрядных двоичных чисел. Чтение и запись производятся через одну и ту же головку. Полный

объем запоминающего устройства — 1024 числа для модели с 8 головками и 3096 чисел для модели с 23 головками.



Фиг. 2

Ввод фотоэлектрический, с перфоленты, скорость ввода — 40 рядов в 1 сек., вывод результатов на телетайп — со скоростью 10 цифр в 1 сек. Оба устройства смонтированы на пульте управления. Там же имеется устройство для ручного ввода.

Основные характеристики машины: частота повторения импульсов 333 *кгц*; код двухадресный, как обеспечивающий наиболее экономное программирование. Среднее время выборки числа при объеме памяти 1024 числа — 6,5 мсек, при объеме 3096 чисел — около 14 мсек (за счет релейного коммутатора головок). Регистр приема числа из памяти выполнен в виде магнитострикционной линии задержки; 4 таких регистра имеются в арифметическом узле, один регистр используется для хранения команд. Кроме того, имеется еще один дополнительный регистр. Минимальное время на одну операцию — 0,2 мсек. Умножение занимает 7—10 мсек (в зависимости от знака чисел).

Н. Я. Матюхин

1436. **Выставка физического общества. Фирма «Эллиот» (Лондон)** (The Physical society's exibition. Elliott Brothers (London), Ltd.), Engineer, 1953, **195**, № 5074, 602 (англ.)

Краткое описание вычислительной машины «401», выставленной фирмой «Эллиот» (Elliott Brothers). Даны основные характеристики (см. реф. 1435). В машине предусмотрена возможность остановки вычислений на любом, заранее заданном месте программы.

Н. Я. Матюхин

1437. **Цифровые вычислительные машины** (Digital computers), Electr. J., 1953, **150**, № 17, 1427—1428 (англ.)

Краткий отчет о докладах по вычислительным машинам, прочитанным 14 апреля 1953 г. в Лондоне.

Доложено о машине Манчестерского университета. Быстродействующая память машины (на электроннолучевых трубках) хранит 10240 двоичных цифр, вспомогательная — 280000 цифр; обмен кодами между ними автоматический. Имеется специальная трубка для преобразования команд, вследствие чего операции с командами требуют значительно меньше времени, чем при использовании обычного накапливающего счетчика; это важно для итерационных процессов. Работает быстродействующее множительное устройство (см. РЖМат, 1953, реф. 477); фотоэлектрический ввод с перфоленты; вывод результатов на телетайп с одновременной перфорацией ленты. Обсуждалась система профилактической проверки, обеспечивающая непрерывную эксплуатацию машины в течение 5 дней в неделю.

Сделано сообщение о системе запоминания десятичных цифр в электроннолучевых трубках. Представление цифр десятью малыми элементами экрана оказалось более удобным, чем двоично-десятичный код. В одной трубке запоминается 32 восьмиразрядных десятичных числа. Память чисто последовательная, время выбора одного разряда **40 μ сек.**

Сообщено об экспериментальных исследованиях механизма запоминания обычных электроннолучевых трубок, в частности, вопроса о среднем потенциале экрана и форме потенциального рельефа, о влиянии формы импульсов засветки и т. д. Предложена упрощенная теория, построенная на аналогии между электроннолучевой трубкой и триодом.

Сообщается, что покрытие магнитных барабанов слоем окиси железа более выгодно, чем применявшееся в машинах Манчестерского университета покрытие никелем, так как в случае повреждения слоя снятие старого слоя и нанесение нового производится несравненно легче, чем при никелировании.

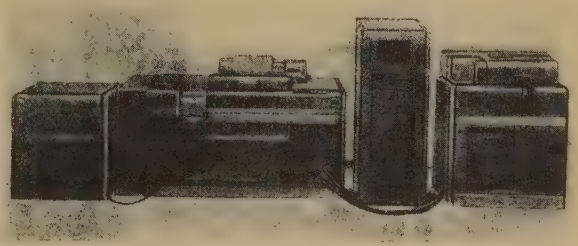
Н. Я. Матюхин

1438. **Цифровые вычислительные машины** (Digital computers), Electr. Rev., 1953, **152**, № 17, 957 (англ.)

См. реф. 1437.

1439. **Электронная вычислительная машина IBM с программированием на перфокартах** (The IBM card-programmed electronic calculator), Computers and Automation, 1953, **2**, № 4, 28 (англ.)

В объявлении фирмы «Интернейшнл Бизнес Машинс» (International Business Machines) приведен общий вид комплекта устройств, составляющих электронную вычислительную машину с програм-



мированием на перфокартах (см. фото), а также машин ИБМ-604 и ИБМ-701.

1440. «Ремингтон Ранд» предлагает новую электронную вычислительную машину (Remington Rand offers new electronic brain), Chem. Engng Progr., 1953, 49, № 5, 56 (англ.)

Сообщение о выпуске фирмой «Ремингтон Ранд» автоматической электронной вычислительной машины ИРА 1103 (ERA 1103), которая, как указывается, сможет быть использована для автоматизации управления производственными процессами (РЖМат, 1953, реф. 933). Указана скорость сложения —16 700 десятизначных чисел в 1 сек. В машине 4500 ламп; вес ее 10 *т*; длина 16,46 *м*, ширина 6,10 *м*. Первый экземпляр будет передан военному ведомству, выпуск машин для продажи намечается на март 1954 г. Стоимость машины составляет 850 тыс. долларов. Машина может быть продана и предоставлена в аренду. *Д. Ю. Панов*

1441. Электронная вычислительная машина МОНРОБОТ (MONROBOT electronic calculator). Computers and Automation, 1953, 2, № 3, 40 (англ.)

Объявление фирмы «Монробот» (Monrobot Corp.) о выпуске компактной и простой электронной вычислительной машины МОНРОБОТ. Машина состоит из маленькой клавишной панели управления и ввода, печатающего устройства и собственно вычислительного устройства, размером в обычный конторский стол (см. фото).

Скорость выполнения действий, включая время выборки из памяти, такова: сложение, вычитание, сравнение — 450 операций в 1 мин.; умножение и деление — 100 операций в 1 мин.; печать — 10 знаков в 1 сек. *Д. Ю. Панов*

1442. Проверенная производительность (Proven performance), Computing Mach. Field, 1953, 2, № 1, 44 (англ.)

В рекламном объявлении фирмы «Ремингтон Ранд» Remington Rand, Inc.) приводятся следующие данные о работе машины УНИВАК (UNIVAC):

1. После выверки программного устройства машина непрерывно работала 29 час. без всяких нарушений нормальной работы.

2. Для решения задач матричной алгебры требуется следующее время:

Порядок матрицы	Время для умножения		Время для обращения матрицы
	квадратной матрицы на квадратную	квадратной матрицы на колонку	
50	1 час.	1 мин.	1 час.
100	7 час.	7,5 мин.	8 час.
200	55 час.	30 мин.	57 час.
300	185 час.	1 час.	200 час.

1443. Маленькие машины-автоматы для целей преподавания (Small robots for educational purposes), Computing Mach. Field, 1953, 2, № 1, 45 (англ.)

Сообщение фирмы «Беркли» (Edmund C. Berkeley and Associates) о том, что ряд малых машин, полезных для целей преподавания, может быть взят в аренду или заказан. Среди этих машин: 1) СИМОН (SIMON), миниатюрная механическая машина, оперирующая с числами до 255 и выполняющая 9 математических и логических операций; управление от перфоленты или ручное (описание см. Scient. American, 1950, Nov.; Radio-Electronics, 1950, Oct.); 2) СКВИ (SQUEE) или «автоматическая белка». Она движется по полу, берет «орехи» своими «руками», несет их к своему «гнезду», оставляет их там и возвращается за новыми «орехами» (описание см. Radio-Electronics, 1951, Dec.; Popul. Sci., Monthly, 1952, July) и ряд других. *Д. Ю. Панов*

1444. Электронные цифровые вычислительные машины (Electronic digital computers), Nature, 1953, 171, № 4353, 599—600 (англ.)

На конференции по вычислительным машинам, происходившей 10—12 декабря 1951 г. в Филадельфии (США), присутствовало 877 человек. Были заслушаны доклады о 10 больших электронных машинах: УНИВАК (UNIVAC), ОРДВАК (ORDVAC), СЕАК (SEAC), ИРА 1101 (ERA 1101), о машине фирмы «Берроус» (Burroughs), машине «Вихрь 1», машине Манчестерского университета, об электронном перфораторе ИБМ и машине МАРК III. Кроме того, были сделаны доклады о семи цифровых машинах фирмы «Белл» (Bell Telephone Co.), о применении транзисторов и о применении вычислительных машин в самолетостроении. *Н. Я. Матюхин*

1445. Выставка электрического оборудования (Canadian electrical supply to hold products show), Radio, Telev. and Appliance Sales, 1953, 9, № 4, 140 (англ.)

Сообщение о выставке электрического оборудования 27—29 апреля 1953 г. в Монреале (Канада), на которой демонстрировалась электронная счетная машина «Берти» (Bertie the brain) для игры в крестики и нолики (см. РЖМат, 1953, реф. 940). Приведено фото машины. *Д. П.*

1446. Основные характеристики цифровых и моделирующих вычислительных устройств. Солзер (Fundamental characteristics of digital

and analog units. Salzer John M.), Radio and Telev. News, 1953, **49**, № 2, 13—15, 30 (англ.)

На примерах показывается недостаточность подразделения вычислительных устройств на цифровые и моделирующие. Предлагаются три характеристики таких устройств: 1) позиционность, 2) квантовость, 3) табулируемость (sampling).

Первая характеристика показывает, что данные, с которыми производятся вычисления, записываются в обычной позиционной системе.

Квантовость соответствует тому, что функция задается через равные интервалы (кванты) ее значений. Квантовое и неквантовое задание функции различаются характером распределения ошибок. В первом случае распределение равномерное, во втором — неравномерное, чаще всего нормальное.

Табулируемость характеризует систему ввода и состоит в том, что функция задается через равные значения аргумента. Указывается на целесообразность предлагаемой классификации в связи с конструированием новых машин. *Н. П. Жидков*

1447. Моделирующее устройство, использующее принцип моста Кельвина. Литл (An analogue computer employing the principle of the Kelvin bridge. Little V. I.), Proc. Phys. Soc., 1953, **66B**, ч. 3, № 399, 185—188 (англ.)

Моделирующее устройство, предназначенное для получения α из уравнения $\cosh 2\alpha\, S_1/\cosh 2\alpha\, S_2 = A$, которое встречается при исследовании диэлектрических свойств жидкостей.

Прибор состоит из бронзовой проволоки, изогнутой по закону $y = \log \cosh 2\alpha S$ для значений $2\alpha S$ от 0 до 2. Вдоль оси X расположены две шины из молибдена диаметром 1,34 *мм*. Расстояние между шинами равно $\log A$. Перемещением шин одновременно вдоль оси Y добиваются равновесия моста. По абсциссам точек пересечения шин с проволокой определяют значение α. Точность определения может быть доведена до 0,2%. Приведена фотография. *Н. В. Корольков*

1448. Элементы моделирующего устройства для решения нелинейных дифференциальных уравнений. Лудеке, Моррисон (Analog computer elements for solving nonlinear differential equations. Ludeke Carl A., Morrison Cohn L.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 3, 243—248 (англ.)

Свободные колебания подвижной системы электродинамического гальванометра описываются, как известно, однородным обыкновенным дифференциальным уравнением 2-го порядка. При помощи фотооптического преобразователя авторы вводят в подвижную катушку гальванометра электрический ток, пропорциональный заданной функции угла поворота θ подвижной системы. Вследствие этой искусственной обратной связи, колебания системы описываются нелинейным уравнением. В подвижную катушку можно также подвести ток, изменяющийся как заданная функция времени, и этим задать правую часть уравнения.

Элемент электродинамического моделирующего устройства представляет собой подвешенную внутри неподвижной катушки подвижную катушку, которая перемещает задвижку, расположенную на пути пучка света между фотоэлементом и источником света.

Задвижка изменяет количество света пропорционально некоторой функции угла поворота $f(\theta)$, заданной формой затвора. Ток на выходе фотоэлемента прямо пропорционален интегралу этой функции по углу θ. Усилитель постоянного тока усиливает величину этого тока и позволяет устанавливать различные значения коэффициента пропорциональности и его знак (+ или —).

Устанавливая различную форму выходного отверстия (маску) источника света или подвижной задвижки (диафрагмы), можно изменять $f(\theta)$.

Приведены осциллограммы кривых колебаний подвижной системы элемента устройства и кривых силы тока в его катушке для некоторых нелинейных уравнений 2-го порядка:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k\theta^3 = 0,$$

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \theta - (k_3/k_1)\,\theta^3 = 0,\ k_3 = 1,\ k_1 = 6,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k_1 x + \begin{cases} k_3x^3 \\ k_3x^3 \end{cases} = 0 \quad \begin{matrix} x > 0 \\ x < 0 \end{matrix}$$

и другие осциллограммы.

Приведена форма отверстий (масок), создающих необходимые для решения этих уравнений нелинейные зависимости.

Указано на возможность соединения ряда таких элементов для решения систем уравнений 2-го порядка. Данные об источниках погрешностей метода не приведены. *Л. И. Гутенмахер*

1449. Конференция по математическим таблицам в связи с электронными вычислительными машинами (NBSNAML. — On may 15, 1952, at Washington...), Math. Tablet and other Aids Comput., 1953, **7**, № 41, 60 (англ.)

На конференции, происходившей 15 мая 1952 г. в Вашингтоне, обсуждались: уже ведущиеся работы; текущие требования со стороны физики, аэродинамики, военных приложений, статистики; перспективные работы, в частности вопрос о том, нужны ли таблицы бесселевых функций 2-го рода выше чем 20 порядка.

1450. Автоматические счетные машины. Перечень. 1-й список, сводный, по состоянию на 3 марта 1953 г. (Automatic computers — list. Ed. 1, cumulative, information as of March 3, 1953), Computers and Automation, 1953, 2, № 2, 20—22 (англ.)

Перечень автоматических счетных машин, содержащий следующие данные: наименование; организация-изготовитель; назначение (универсальная машина или специального назначения); общая характеристика (цифровая машина или моделирующее устройство; электронная, релейная или механическая машина); размер (малая, средняя или большая); количество (0, если еще не закончена; 1; 2; малое количество — от 2 до 6; среднее — от 7 до 30; большое — свыше 30; неизвестное количество).

В перечень включено 87 машин, из которых цифровых — 64; непрерывного действия — 17; комбинированных (цифровых дифференциальных анализаторов) — 6; электронных — 72; релейных — 10; механических — 5 (в том числе 4 дифференциальных анализаторора); универсальных — 73; специального назначения — 14; малых — 21 (сюда относятся,

например, машины ИБМ-604, ДЖЕНКОМП и др.); средних — 19 (сюда относятся КАЛДИК и др.); больших — 37. Из включенных в перечень машин 75 американских, 6 английских, 1 шведская, 1 голландская, 2 немецких, 1 австралийская, 1 канадская. *Д. Ю. Панов*

1451. Автоматические счетные машины. Перечень. 2-й список, дополнительный, по состоянию на 3 мая 1953 г. (Automatic computers — list. Ed. 2, supplement, information as of May 3, 1953), Computers and Automation, 1953, 2, № 4, 24 (англ.)

Перечень, дополняющий список № 1 (см. реф. 1450). Приведены сведения еще о 10 машинах, из которых цифровых — 6, непрерывного действия — 3, логических — 1; электронных — 6; релейных — 2; с неуказанной системой — 2. Из этих машин 3 английские, остальные американские.

Д. Ю. Панов

1452. Список организаций, работающих в области вычислительных машин и автоматики. 7-й список, сводный, по состоянию на 1 апреля 1953 г. (Roster of organizations in the field of computers and automation, 7 ed., cumulative, information as of April 1, 1953), Computers and Automation, 1953, 2, № 3, 7—18 (англ.)

Тщательно составленный список организаций, работающих в области вычислительных машин и автоматики. В список включены 174 организации (из них в США — 153; Англии — 10; Франции — 5; Канаде — 2; Австралии — 2; Швеции —2; Голландии — 1; Германии — 1).

Указывается характер деятельности организаций (производство; продажа; исследования и разработка; консультирование; эксплуатация; правительственные организации); область интересов (цифровые машины; моделирующие устройства; случайные интересы в области счетных машин, сервомеханизмы; автоматическое управление машинами; автоматическая обработка); число рабочих; год основания.

1453. Список организаций, работающих в области вычислительных машин. 5-й список, дополнительный, по состоянию на 23 января 1953 г. (Roster of organizations in the field of computing machinery (5 ed, supplement, information as of January 3, 1953), Computing Mash. Field, 1953, 2, № 1, 1—7 (англ.)

Список входит в сводный список № 7 (см. реф. 1452).

1454. Список организаций, работающих в области счетных машин и автоматики. 8-й список, дополнительный, по состоянию на 1 мая 1953 г. (Roster of organizations in the field of computers and automation, 8 ed., supplement, information as of May 1, 1953), Computers and Automation, 1953, 2, № 4, 9—10 (англ.)

Список, дополняющий список № 7 (см. реф. 1452). Включено еще 16 организаций (15 — США, 1 — Италия).

1455. Кто чем занят в области счетных машин. Часть I — Программирование. 1-й список, сводный, по состоянию на 20 декабря 1952 г. (Who's who in the computing machinery field: Section I — Programming. 1 ed., cumulative, information as of December 20, 1952), Computing Mach. Field, 1953, 2, № 1, 9—20 (англ.)

Сводный список научных работников, инженеров, расчетчиков, работников промышленности, интересующихся программированием. В список включено 303 человека, живущих в США, и 8 человек,— в Канаде.

1456. Кто чем занят в области счетных машин и автоматики. Часть I — Программирование. 2-й список, добавочный, по состоянию на 25 марта 1953 г. (Who's who in computers and automation: Section I — Programming. 2 ed. supplementary, information as of March 25, 1953), Computers and Automation, 1953, 2, № 3, 23—27 (англ.)

Добавочный список научных работников, инженеров, расчетчиков, работников промышленности, интересующихся программированием (см. реф. 1455). В список включено 119 человек, живущих в США, и 1 человек,— в Канаде.

1457. «Национальная корпорация по развитию исследований» (National Research Development Corporation), Nature, 1953, **171**, № 4358, 826 (англ.)

В заметке о деятельности английской «Национальной корпорации по развитию исследований» указывается, что корпорация приобрела права на 99 изобретений в области электронных вычислительных машин. 59 из них были разработаны университетами, 30 — государственными учреждениями и 10 — промышленными фирмами; 74 из этих изобретений патентуются в 10 государствах.

Корпорация заключила контракт на поставку четырех машин, аналогичных машине, установленной в Манчестерском университете по проекту проф. Вильямса (F. C. Williams), и подготавливает следующий контракт на поставку прототипа машины меньшего размера с использованием специальной техники. Эта машина, повидимому, будет иметь меньшую стоимость и большую надежность.

1458. Электронный мозг (Electronic brains and chick sexers), Instrum. Practice, 1953, 7, № 5, 333—334 (англ.)

Краткое сообщение о деятельности английской «Национальной корпорации по развитию исследований» (National Research Development Corp.) в области постройки вычислительных машин (см. реф. 1457). *Н. Я. Матюхин*

1459. Экспорт счетных машин (Export of «Brains»), Instrum. Practice, 1953, 7, № 7, 530 (англ.)

Сообщение о поставке фирмой «Ферранти» (Ferranti Ltd.) электронной счетной машины фирме «Шелл» (Royal Dutch Shell) (см. РЖМат, 1953, реф. 938).

1460. Быстродействующее магнитостатическое запоминающее устройство для электронных счетных машин. Биллинг (Schnell aufrufbare magnetostatische Speicher für elektronische Rechenmaschinen. Billing H.), Naturwissenschaften, 1953, **40**, № 2, 49—50 (нем.)

Быстродействующее (т. е. дающее возможность производить быструю запись и считывание данных) магнитостатическое запоминающее устройство разрабатывается в Германии для использования в элек-

тронных счетных машинах. Действие его основывается на физическом свойстве ферромагнитных материалов (в данном случае ферритов) длительное время после их намагничивания сохранять намагниченное состояние.

При записи сердечник доводится до насыщения током, проходящим по одной обмотке, намотанной на сердечник. При считывании данных сердечник перемагничивается и доводится до насыщения в противоположном направлении. При перемагничивании сердечника в обмотке, через которую производится запись, образуется ток, который используется для считывания записанных данных. При считывании данных может использоваться также и специально предназначенная для этого обмотка на сердечнике.

Для работы в магнитостатическом запоминающем устройстве петля гистерезиса ферромагнитного материала (феррита) должна по форме приближаться к параллелограму.

Числа задаются в двоичной системе счисления. Для каждой цифры каждого двоичного числа требуется один сердечник.

Запоминание 256 чисел по 40 двоичных цифр требует, таким образом, $40 \times 256 = 10\,240$ сердечников. Наружный диаметр каждого кольцеобразного ферритового сердечника равен 6 *мм*.

Сердечники, образующие запоминающее устройство, располагаются в определенном порядке, и на обмотки, намотанные на них, в установленной последовательности подаются импульсы тока записи и импульсы тока для считывания данных. Переключение импульсов тока для считывания данных будет производиться при помощи электронных ламп.

Время записи или считывания практически зависит лишь от крутизны импульса тока считывания и может достигать 0,5 *μ сек* и даже меньше.

В настоящее время описанное магнитостатическое запоминающее устройство находится в стадии разработки в группе счетных машин в Институте Макса Планка. *В. С. Бородин*

1461. Использование ламп газового разряда для стабилизации высокого напряжения. Хемпсон (A note on gas discharge tubes for E. H. T. stabilization. Hempson J. G. G.), Electronic Engng, 1953, 25, № 301, 109 (англ.)

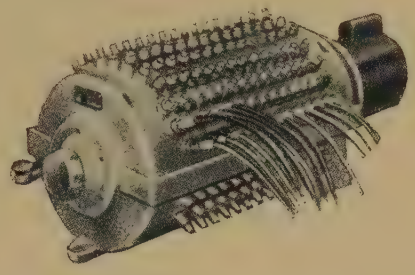
Рассматривается вопрос о применении миниатюрных газоразрядных ламп для стабилизации высокого напряжения в электроннолучевых трубках, фотоумножителях, счетчиках Гейгера. Описан высоковольтный стабилизатор для специальной электроннолучевой трубки. Стабилизированное напряжение в 2 *кв* при токе около 0,7 *ма* снимается с цепочки из 36 сверхминиатюрных газоразрядных ламп типа NT2. Непосредственно с цепочки получаются и промежуточные потенциалы на другие электроды. Номинальное напряжение на каждой из ламп 60 *в*, максимальный ток 1 *ма*. Размеры лампы NT2: высота 27 *мм*, диаметр 7 *мм*, вес 1 *г*. Приводятся вольт-амперные характеристики. Импеданц в оптимальной рабочей точке 1000 *ом*.

Отмечается, что за время экспериментов не было случаев выхода из строя газоразрядных ламп, а также заметного расхождения их характеристик.

Стабилизатор на лампах NT2 с рабочим током 50 *мка* применяется для питания фотоумножителей, предохраняя их от перегрузки и порчи при больших яркостях. *Н. Я. Матюхин*

1462. Надежное электронное запоминающее устройство (The reliable electronic memory), Scient. American, 1953, 188, № 5, 73 (англ.)

Объявление фирмы «ИРА-Ремингтон Ранд» (ERA-Engineering Research Associates division of Remington Rand Inc.) о выпуске стандартного запоминающего устройства на магнитном барабане (см. фото).



1463. Регулируемая линия задержки (Variable delay line), Nucleonics, 1953, 11, № 1, 85 (англ.)

Линия задержки фирмы «Адванс Электроникс» (Advance Electronics Co.) с задержкой, регулируемой от 0 до 0,8 *μ сек*. Время нарастания импульса $3{,}5 \cdot 10^{-5} \sqrt{t}$ *μ сек* (t — задержка в *μ сек*), волновое сопротивление 390 *ом*, затухание 1 *дб* на 15 *Мгц*, 0,5 *дб* на 8 *Мгц*. Размеры 2,5 × 10 × 10 *см*.

Н. Я. Матюхин

1464. Преобразователь непрерывных величин в цифровые (Analog to digital recorder), Rev. Scient. Instrum., 1953, 24, № 2, 186 (англ.)

Сообщение фирмы «Артур Литл» (Arthur D. Little, Inc.) о преобразователе АДРАД (Adrad — Automatic Digital Recorder for Analog Data), который записывает в цифровом виде на телетайпе показания термопар или других измерительных приборов. Собственно преобразователь отрабатывает при помощи группы быстродействующих реле, представляющих десятичные цифры в двоичном коде, соответствующее набранным цифрам напряжение, которое сравнивается с измеряемым напряжением. В случае расхождения напряжений производится поочередная переброска реле при помощи усилителя, дающего разность этих напряжений, до установления соответствия между ними.

Отработка выполняется с точностью до 0,1% за время ~200 *мсек*. Устройство поочередно печатает результаты измерений с 50 входов. Входные напряжения подаются на преобразователь через шаговый переключатель. Диапазон измеряемых напряжений 0 — 20 *мв*. Для каждого входа может быть установлен один из двух имеющихся масштабов. Вместе с числом печатается и его масштаб, одновременно производится перфорация ленты. Скорость печати телетайпа 0,6—0,8 *сек*. на 1 число.

Имеется возможность перехода от автоматической работы к ручному выбору любого из каналов. Считывание производится с неоновых ламп или печатанием на телетайпе. Приведена фотография установки. *Н. Я. Матюхин*

1465. Миниатюрная переменная линия задержки с непрерывной регулировкой (Continuously-

variable miniature delay line), Instruments, 1953, 26, № 1, 75—76 (англ.)

См. реф. 1463.

1466. Преобразователь непрерывных величин в цифровые (Analog to digital converter), Rev. Scient. Instrum., 1953, 24, № 1, 85 (англ.)

Сообщение фирмы «Консолидейтид» (Consolidated Engineering Corporation) о разработке преобразователя Спектро-САДИК, автоматически преобразующего в цифровую форму данные от масс-спектрометра. Результаты измерений перфорируются на перфокартах или печатаются. На измерение в одной точке спектра и печатание требуется 10 сек. Производятся автоматические измерения в 40 точках спектра. Точность измерений 0,1%. (См. РЖМат, 1953, реф. 945—946). *Н. Я. Матюхин*

1467. Законченная система обработки данных (A complete data-handling program), Computing Mach. Field, 1953, 2, № 1, 36 (англ.)

Сообщение фирмы «Консолидейтид» (Consolidated Engineering Corp.) о преобразователях непрерывных данных в цифровую форму САДИК (SADIC) и МИЛЛИСАДИК (MILLISADIC) и о быстродействующей цифровой счетной машине 30-201.

Преобразователь САДИК обеспечивает точность в 0,1% при скорости преобразования 1 значение в 1 сек. (см. РЖМат, 1953, реф. 945).

Преобразователь МИЛЛИСАДИК дает точность в 0,2—0,3% при скорости преобразования 1000 значений в 1 сек.

Счетная машина 30-201 работает по двоично-пятеричной системе; запоминающее устройство на магнитном барабане емкостью 4000 чисел. Кроме того, имеется запоминающее устройство на 80 чисел с малым временем выборки. Число состоит из 10 десятичных разрядов и знака. Используется одноадресный код с 42 основными командами. Большинство операций идет со скоростью $\sim$ 500 в 1 сек.

Д. Ю. Панов

1468. Счетчик с печатающим устройством (Scaler-printer), Nucleonics, 1953, 11, № 1, 82 (англ.)

Сообщение фирмы «Норт-Американ Филипс» (North American Philips Co., Inc.) об устройстве из двух электронных счетчиков, каждый из которых может подсчитывать 64 000 импульсов. Максимальная скорость счета 200 000 имп/сек.

Показания счетчика печатаются в масштабе от 1 до $\frac{1}{64}$ за 0,13 сек. в виде трехзначного десятичного числа от 0 до 999. Печатание производится через заданные промежутки времени, регулируемые в пределах до 55 сек. *Н. Я. Матюхин*

1469. Электронный счетчик, считающий в двух направлениях, для целей интерферометрии. Брейнин (A bi-directional electronic counter for use in optical interferometry. Branin Flanklin H., Jr.), Bull. Amer. Phys. Soc., 1953, 28, № 1, 16 (англ.)

Счетчик, считающий в двух направлениях, имеет два входа и работает на сложение или вычитание в зависимости от соотношения фаз синусоидальных электрических импульсов, поступающих на каждый из входов. Максимальная скорость счета 200 000 импульсов в 1 сек.

Счетчик первоначально был разработан для механизации утомительного визуального подсчета интерференционных колец, однако он может быть использован для дифференциального счета любых двух несвязанных между собой серий импульсов.

Н. Я. Матюхин

1470. Решающие системы (Resolver systems), Instruments, 1953, 26, № 2, 227 (англ.)

Сообщение фирмы «Форд Инструмент» (Ford Instrument Co.) о новом электрическом решающем устройстве, предназначенном для вычислительных машин и приборов и состоящем из собственно решающего устройства (функциональное устройство), усилителя с большим коэффициентом усиления и суммирующей схемы. Суммирующая схема объединяет входные данные и через усилитель питает функциональное устройство, на выходе которого получается требуемая функция. Решающие устройства смонтированы в виде стандартных взаимозаменяемых блоков и работают удовлетворительно при температурах от — 50° до + 70°. Такие системы, первоначально разработанные для военных целей, позволяют решать различные задачи.

Е. А. Волков

1471. Печатные схемы (Printed electrical circuits), Brit. Engng, 1953, 35, № 90, 328—331 (англ.)

Описывается в общих чертах способ изготовления печатных схем, применяемый фирмой «Технограф» (Technograph Printed Circuits, Ltd.). В основном этот способ состоит в покрытии изоляционной основы металлической фольгой, печатании на фольге нужной схемы и травлении. Изготовленные этим способом печатные схемы имеют следующие достоинства: а) хорошие электрические качества; б) почти неограниченные возможности выбора материалов изолятора и фольги; в) возможность воспроизведения самых разнообразных схем; г) невысокую стоимость.

Кроме обычных «жестких» схем фирмой налажено производство схем совершенно нового типа — «гибких» (foldable) схем. В схемах этого типа проводящий слой наносится на гибкий изолятор (например, на полиэтилен или другие пластичные пленки, пропитанную бумагу или ткань, стеклянную пряжу, синтетический каучук в виде тонких листов, кремниевую пленку). Схему, полученную нанесением металла на такие изоляторы, можно согнуть, свернуть в рулон или сложить. Схемы могут быть приспособлены для работы при высокой и низкой температурах.

Для создания простых схем, где проводники не пересекаются, используется нанесение металла с одной стороны изолятора; для более сложных схем, где перекрещивания избежать нельзя, употребляется нанесение металла с обеих сторон изолятора. В этом случае часть схемы располагается на одной стороне изолятора, часть — на другой.

Для изготовления схемы по способу «Технограф» прежде всего приготовляется черно-белый рисунок схемы. Затем изготовляется обычным фото-механическим способом печатная форма, с которой специальной краской производится печатание схемы на изолятор, покрытый фольгой. Затем производится травление, химическое или электролитическое, причем все незащищенные краской части фольги растворяются. Весьма существенно, чтобы краска, которой наносится рисунок, была химически стойкой против воздействия травящего раствора и не имела бы на своей поверхности никаких мелких дырок и царапин, из-за которых может вытравиться часть схемы.

Разработан способ регенерации травящего раствора, причем растворенный металл выделяется в виде фольги желаемой толщины, а раствор снова используется.

Основные принципы производства «гибких» схем те же, что и для «жестких» схем, но для большинства гибких изоляторов возможно организовать непрерывные прокатку, печать и травление, употребляя изолятор и фольгу в форме рулонов. В случае необходимости изготовленные схемы могут быть вновь скатаны в рулон и в таком виде храниться. При автоматической сборке такой рулон удобно подавать на сборочные станки.

Одним из самых важных преимуществ печатных схем является возможность автоматической и полуавтоматической сборки. Это относится к схемам радио и телевизионных приемников, измерительных устройств, устройств управления и ряда других устройств.

В частности, припайка деталей к схеме может производиться автоматически. Возможно даже укрепление ламповых панелей в заранее заготовленные для них отверстия.

В том случае, если «жесткие» печатные схемы изготовляются на пластмассовой основе, отпадает необходимость в металлическом шасси, так как конструкция имеет достаточную жесткость.

В статье описываются печатные обмотки трансформаторов и схемы для автоматических телефонных станций. Указывается, что способ печати может быть употреблен для изготовления обмоток моторов, а также для решения многих других задач, которые ранее считались невыполнимыми. Изготовление нагревательных цепей возможно при использовании комбинации асбестового картона и сплавов высокого сопротивления. Печатные тензометрические датчики, изготовленные способом нанесения фольги на тонкую, электрически и механически прочную лаковую пленку, имеют большие преимущества перед обычными датчиками сопротивления.

Напряжение от образца к тензочувствительному материалу у такого датчика передается лучше, т. к. тензочувствительный материал у обычного проволочного датчика отделен от образца более толстым слоем бумаги. Поверхность охлаждения печатного датчика больше, нежели соответствующего проволочного, поэтому печатный датчик допускает нагружение большим током и имеет, следовательно, большую чувствительность.

Приведены фотографии некоторых печатных схем и тензодатчика, изготовленного печатным способом. *Л. В. Кутуков*

1472. Печатные схемы. Еникке (Gedruckte Schaltungen. Jänicke), Radio Mentor, 1953, 19, № 3, 114—115 (нем.)

В общих чертах сообщается о технологии производства печатных схем в Германии. Печатные схемы изготовляются путем нанесения проводящего слоя, или слоя, обладающего нужным сопротивлением, на изолирующее основание (чаще всего керамическое, иногда стеклянное). Рисунок проводящего слоя наносится на основание методом накатки с валика или штамповкой с шаблона, или как-либо еще. После нанесения схемы производится вжигание проводящего слоя в основание при довольно высокой температуре.

Приведены некоторые графики зависимости величин емкости и сопротивления печатной схемы от температуры, а также величины сопротивления от приложенного напряжения. *В. С. Бородин*

1473. Производство радиодеталей в Великобритании. Даммер (Electronic components in Great Britain. Dummer G. W. A.), Electrical Engng, 1953, 72, № 2, 167—169 (англ.)

В настоящее время в Англии существуют несколько крупных учреждений, работающих в области радиолокации и радиосвязи. Деятельность этих учреждений координируется Комитетом по разработке и изготовлению радиодеталей (RCRDC — Radio Components Research and Development Committee). Этот Комитет ведает размещением большинства заказов на разработку и производство радиодеталей.

С 1944 года в Англии проводились работы, целью которых являлось повышение надежности радиоустановок. В результате проведенных работ надежность радиоустановок за послевоенный период увеличилась в 4 раза. Этому в значительной степени способствовало то обстоятельство, что все поставщики радиоаппаратуры были обязаны производить испытания аппаратуры в естественных условиях. Весь комплекс испытаний проводился на первых образцах с тем, чтобы в случае необходимости можно было своевременно внести необходимые изменения. Эти испытания показали, что 80% всех дефектов должно быть отнесено за счет плохого качества деталей. В настоящее время в Англии ведутся работы по разработке металлопленочных сопротивлений, работы в области теории диэлектриков и теоретической физики, проводятся исследования свойств ферритов полупроводников и материалов, находящихся при температуре жидкого водорода.

Были разработаны образцы металлопленочных сопротивлений, у которых пленка металла наносилась на пластинки, стержни и на стеклянные волокна диаметром 0,025 *мм*. Пленки получались при помощи обжига солей золота и платины, наносимых механически или фотоспособом. Этим способом удалось получить переменные сопротивления. Проводились также эксперименты по использованию в качестве материала для переменных сопротивлений сурьмянокислого олова, которое наносилось на стеклянную основу. Был сконструирован станок для прецизионной намотки потенциометров, который наматывает торондальные катушки с точностью до 0,02% на анодированных алюминиевых формах диаметром до 150 *мм*.

Для выводных клемм трансформаторов вместо серебряной керамики и спая металла со стеклом употребляется алюминизированная керамика. Она механически прочна и хорошо противостоит электролитической коррозии.

Значительно продвинулась техника изготовления печатных схем. Был проведен ряд экспериментальных работ по выработке способа автоматического изготовления печатных схем. При этом способе пайка проводников производится автоматическим погружением в расплавленный припой (solder-dipping), а монтажная схема, в случае необходимости, может быть легко изменена. Изготовление опытной схемы, содержащей 16 сопротивлений, устанавливаемых автоматически, происходит за 40 сек. Некоторые фирмы начинают выпускать печатные схемы для электронной аппаратуры автоматического управления огнем на самолете.

Применение автоматической сборки значительно

повысит надежность аппаратуры. Правильно сконструированная сборочная машина будет работать без ошибок и без утомления; отклонения в точности можно выправлять ранее, чем они превысят установленные пределы.

Существенное требование, предъявляемое к таким машинам: возможность изменения схемы, замены деталей и т. д. без значительных изменений в технологическом процессе.

Необходимо провести еще большую работу, главным образом в области конструирования деталей, прежде чем эту автоматическую систему можно будет считать окончательно отработанной, но преимущества аппаратуры, изготовляемой по этому способу (малые размеры, высокая надежность и простота обслуживания), позволяют сделать вывод, что радиоаппаратура будущего будет изготовляться подобными способами.

В свете современных исследований в области кристаллических триодов и полупроводниковых элементов представляется возможным в будущем изготовление электронной аппаратуры в виде сплошных блоков, состоящих из слоев изолирующих, проводящих, выпрямляющих и усиливающих материалов.

В статье приведены фотографии некоторых миниатюрных радиодеталей и схема технологического процесса автоматического изготовления печатных блоков. *Л. В. Кутуков*

1474. Соединительная планка для печатных схем (Printed circuit connectors), Electronics, 1953, 26, № 1, 284 (англ.)

Сообщение фирмы «Де-Джер-Амско» (DeJur-Amsco Corp.) о выпуске соединительных планок, предназначенных для сборки миниатюрных печатных схем. Планка состоит из ряда контактов из фосфористой бронзы, позолоченных или посеребренных, с концами залуженными для облегчений пайки при сборке. Контакты запрессованы в пластмассу, поляризация их положительная. *Л. В. Кутуков*

1475. Сверхминиатюрный триод (Subminiature triode), Proc. inst. Radio Engrs, 1953, 41, № 1, 138A (англ.)

Сверхминиатюрный триод СК6247 (раньше СК628) фирмы «Райтеон» при вибрациях с частотой 40 *гц* и амплитудой ускорения 15 *g* дает уровень шума 2,5 *мв* на анодной нагрузке 10 *ком*. Коэффициент усиления 60, крутизна 2,5 *ма/в*, анодное напряжение 275 *в*. *Н. Я. Матюхин*

1476. Любопытное свойство запоминать данные у кристалла (Crystal has amazing memory), Mod. Power and Engng, 1953, 47, № 1, 116 (англ.)

На собрании Американского ин-та инженеров-электриков в Нью-Орлеане был прочитан доклад сотрудника фирмы «Белл» Андерсона (Anderson J. R.) на тему «Фэрроэлектрики как запоминающие элементы для счетных машин».

В докладе указывалось, что специально приготовленные кристаллы титаната бария использовались в качестве элементов запоминающих устройств в счетных машинах. Исследования показали, что кристаллы толщиной от 0,1 до 0,25 *мм* способны к запоминанию на площади 6,25 *см*^{2} до 2.500 импульсов, длительностью менее 1 *мсек*. Они пригодны к работе на низких напряжениях (менее 10 *в*), не потребляют мощности в процессе запоминания, допускают широкие вариации вида схем и обеспечивают хранение данных длительное время без их восстановления. *А. В. Ржанов*

1477. Фирма GE разрабатывает новые полупроводниковые триоды (GE develops new transistor), Amer. Aviat. Daily, 1953, 85, № 18, 165 (англ.)

Компания «Дженерал Электрик» (General Electric) объявляет о разработке нового герметически защищенного полупроводникового триода с поверхностным контактом, который, как утверждают, должен эффективно работать при температуре + 100° и при наиболее неблагоприятных условиях влажности. Полупроводниковый триод разрабатывался по контракту с Военно-воздушными силами, Корпусом связи и Военным флотом США, и его предполагают впервые применить в военном электронном оборудовании, в частности, в устройствах радиолокации и связи. *Н. И. Бродович*

1478. Некоторые свойства кремниевых точечно-контактных триодов. Гранвилл, Бардсли (Some properties of silicon point-contact transistors. Granville J. W., Bardsley W.), Proc. Phys. Soc., 1953, 66 B, ч. 5, № 401, 429 (англ.)

Серьезным недостатком германиевого триода является быстрое ухудшение его рабочих характеристик при повышении температуры. Теоретические соображения показывают, что полупроводниковые триоды, изготовленные из кремния, могли бы удовлетворительно работать при температуре, превышающей ее предельное значение для германиевых триодов (обычно 60—70°), так как ширина запрещенной энергетической зоны кремния значительно больше ширины запрещенной энергетической зоны германия.

Это подтверждено экспериментально. Из кремния типа «*p*» с удельным сопротивлением 140 *ом см* были изготовлены образцы точечно-контактных триодов. Поверхность кремния протравливалась смесью СР-4, причем контакты формовке не подвергались. Максимальный коэффициент усиления типовых образцов был получен: по мощности 8, по напряжению 10, по току 1,8. Были изготовлены образцы и со значительно лучшими данными. С повышением температуры коэффициент усиления напряжения в данной рабочей точке триода понижался по сравнению с его значением для комнатной температуры, составляя 50% этого значения при 90° и 20% при 150°. Коэффициент усиления тока в этом температурном интервале существенно не изменялся.

Частотная характеристика триодов из кремния, как показывают предварительные исследования, заметно не отличается от характеристики типичной для германиевых триодов.

Хотя характеристики имеющихся в настоящее время триодов из кремния при комнатной температуре хуже, чем соответствующие характеристики лучших точечно-контактных германиевых триодов, однако способность триодов из кремния работать при высокой температуре окружающей среды доказывает их практическую ценность для многих применений. *Н. И. Бродович*

1479. Заменитель германия (Germanium substitute), Radio Electr. Weekly, 1953, 36, № 6, 14 (англ.)

Фирма «Браун-Аллен» (Brown-Allen Chemical Inc.) сообщает о разработке синтетического материала для замены распространенного в полупроводниковых триодах германия. Производство этого материала налаживается, и он должен быть выпущен в текущем году. *Н. И. Бродович*

1480. Новые математические приборы. Дюбуа (Nouveaux appareils pour opérations mathématiques. Dubois Fr.), Génie civil, 1953, **130**, № 9, 169—171 (франц.)

Настоящая заметка является последней из трех заметок автора под тем же названием (РЖМат, 1953, реф. 967, 968). В ней дается краткое описание двух приборов специального назначения. Первый из них — это прибор с шаровыми интеграторами для интегрирования дифференциального уравнения движения поезда:

$$\frac{dv}{dt} = f(v) - g\sin\alpha, \quad \frac{dx}{dt} = v, \quad \alpha = \alpha(x).$$

Функции $f(v)$ и $\alpha(x)$ задаются графиками и в процессе интегрирования оператор, вращая две ручки прибора, должен обеспечить движение указателей по этим графикам. Изменение независимой переменной задается вращением небольшого электромотора. Более детальное описание прибора дано в Rev. gén. chemins de fer за апрель 1950 г.

Второй прибор, снабженный дериватором и интегратором, предназначен для автоматической записи скорости $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ и работы тяги ($\int T\,dx$) при испытаниях на специальных стендах тракторов, мотовозов и т. п. Приведены фотографии обоих приборов.
К. А. Семендяев

1481. Вычислительное устройство для определения радиуса действия телевизионных сигналов (TV signal range calculator), Electrical Engng, 1953, Sec. 1, **72**, № 1, 20A, 24A (англ.)

Фирма «Пайонир Электроник» (Pioneer Electronic Supply Co.) сообщает о вычислительном устройстве типа счетной линейки для определения радиуса действия телевизионных сигналов. *Л. Е. Садовский*

1482. Упрощение текстильных вычислений при помощи счетной линейки. Хей (Textile calculations simplified by the slide rule. Haigh W.), Text. Manufacturer, 1953, **79**, № 941, 241—242, 277 (англ.)

Приводятся примеры применения счетной логарифмической линейки в расчетах, которые приходится выполнять работникам текстильной промышленности.

Даются практические правила вычисления выражений вида abc/de, вычисления T по формуле вида $1/T = 1/A + 1/B + 1/C$, пропорционального деления, вычисления серии значений, прямо и обратно пропорциональных данным, вычисления серии значений $y = a\sqrt{x}$ при данном a и серии данных значений x посредством одной установки движка, вычисления серии значений $y = a^2cx/b^2d$ при данных значениях a, c, b d и серии данных значений x посредством двух установок движка и т. д.

Для читателя, хорошо изучившего какое-нибудь солидное руководство по счетной линейке, статья не даст ничего нового, но она ясно показывает потребность инженерно-технических работников в более глубоком изучении больших и неполно используемых возможностей, скрытых в счетной линейке. *В. М. Брадис*

1483. Вычисление со счетной линейкой. Бёрнер (Das Rechnen mit dem Rechenstab. Börner R.), Holzindustrie, 1953, **6**, № 4, 108—111; № 5, 143—147 (нем.)

Руководство для самостоятельно изучающих счетную линейку.

1484 РЕЦ. Обзор электронных цифровых вычислительных машин (Review of electronic digital computers. Papers and discussions presented at the Join AIEE-IRE computer conference. Philadelphia, 1951, pp. 114, illustrations, N. Y., American Institute of Electrical Engineers, 1952, 3.50 doll.) [**Рецензия: Чарп** (Charp S.), J. Franklin Inst., 1953, **255**, № 1, 82—83 (англ.)]
См. реф. 1444

1485 РЕЦ. Математические машины и инструменты. Виллерс (Mathematische Maschinen und Instrumente. Willers Fr. A., S. 320, 258 Bild., Akademie-Verlag, Berlin, 1951, DM 34) [**Рецензия: Вейнель** (Weinel), Technik, 1953, 8, № 3, 206 (нем.)]

1486 РЕЦ. Инструментальная математика для инженеров. Мейер-цур-Капеллен (Instrumentelle Mathematik für den Ingenieur. Meyer zur Cappellen Walther, S. 383, 190 Fotos, 26 Tab., Essen, Verlag W. Girardet, 1952, DM 27.80) [**Рецензия: Расмуссен** (Rasmussen H.), Ind.-Anzeiger, 1953, **75**, № 11, 34; **Боклер** (Beauclair), Forsch. Gebiete Ingenieurswesens, 1953, **19**, № 1, 23—30 (нем.)]

1487 Д. Исследование возможности использования сравнивающих и избирательных устройств в вычислительных машинах. Галкин Ф. Я. Автореф. дисс. канд. техн. н., Ленингр. ин-т точн. мех. и оптики, Л., 1953

1488 П. Устройство переносов для электронных счетчиков. Вильямс (Carry device for electronic calculators. Williams Samuel B.) [The National Cash Register Co., Огайо, США]. Пат. США 2626752, кл. 235—133, 27.01.53

Устройство используется в сумматоре, имеющем в каждом разряде счетчик, и состоит из приведенных в описании схем для каждого разряда. Цепь переноса вдоль всего сумматора представляет собой последовательное соединение указанных схем. Когда показание счетчика в каком-либо разряде достигает определенной величины, соответствующая схема подготавливается для осуществления передачи единицы в следующий разряд. Если же показание счетчика меньше этой величины, схема подготовлена для передачи нуля.

Сигнал переноса, пришедший из более низкого разряда, действует на данный разряд и, кроме того, на следующий. Действие сигнала на следующий разряд реализуется в зависимости от состояния цепей переноса: подготовлены ли они для передачи единицы или для передачи нуля. Приведенная схема имеет ряд неточностей. Подобного типа устройства для счетных цепей машины ЭНИАК известны уже давно. *П. П. Головистиков*

1489 П. Запоминающая система. Эккерт, Мочли (Memory system. Eckert John Presper, Jr., Mauchly John W.) [Eckert-Mauchly Computer Corp., Филадельфия, США]. Пат. США 2629827, кл. 250—27, 24.02.53

Запоминающее устройство использует электроакустическую линию задержки. Передающий элемент возбуждается формирователем импульсов. Импульс, принятый приемным элементом, детектируется и усиливается трехкаскадным видеоусилителем. Усиленный импульс поступает на вентиль рециркуляции и вентиль считывания. На анодную нагрузку вентиля рециркуляции работает вентиль записи.

Восстановление импульса по фазе осуществляется при помощи триггерной схемы. Триггер срабатывает от импульса, прошедшего через тракт хранения. Установка триггера в исходное положение осуществляется импульсами, следующими от главного генератора импульсов. Формирователь импульсов возбуждается триггером в момент перехода последнего в исходное положение. Приведена принципиальная схема. *В. А. Зимин*

1490 П. Система декодирования данных. Джонсон (Data decoding system. Johnson Eric Arthur) [Minister of Supply, Лондон, Англия]. Пат. США 2630552, кл. 318—28, 3.03.53

Система декодирования электрических данных, приходящих по ряду входных цепей (каждая цепь соответствует определенному элементу многоэлементного кода) с избирательным устройством, которое может присоединяться к любой входной цепи, и устройством, определяющим положение данных после декодирования. *В. С. Бородин*

1491 П. Цифровое регистрирующее устройство для измерительных систем. Николс (Digital indicating arrangement for measuring systems. Nichols Nathaniel B.) [Taylor Instrument Co., Нью-Йорк, США]. Пат. США 2625822, кл. 73—360, 20.01.53

Устройство для преобразования из непрерывной формы в цифровую данных, получаемых при некоторых измерениях, производимых по методу компенсации, например, при измерении температуры при помощи термопары.

Устройство состоит из 1) источника постоянной э.д.с., 2) декадных магазинов сопротивлений, 3) фазочувствительного детектора, 4) электромагнитного механизма автоматического привода.

Напряжение, снимаемое с потенциометра, образованного декадными магазинами сопротивления, включается навстречу напряжению, даваемому термопарой; разность этих напряжений воздействует на фазочувствительный детектор. Если эта разность напряжений не равна нулю, электромагнитные механизмы меняют соотношение плеч потенциометра до тех пор, пока она не станет равной нулю. С ползунками магазинов сопротивлений связаны оцифрованные диски; сочетания цифр на этих дисках дают выражение измеряемой величины в дискретной форме. *Л. В. Кутуков*

1492 П. Электрический расчетный стол для решения задач фазового равновесия. Мускат (Electrical calculator for solving phase equilibrium problems. Muskat Morris) [Gulf Research and Development Co., США]. Пат. США 2630968, кл. 235—61, 10.03.53

Для решения уравнений типа

$$\sum_{j=1}^{j=n} \frac{p_j}{q_j + r_j x} = z,$$

где $n > 1$ и p_j, q_j, r_j, z — известные величины, а требуется найти x, можно использовать электрическую схему, состоящую из n параллельных ветвей. Каждая ветвь цепи состоит из источника тока (напряжение p_j), постоянного сопротивления q_j и реостата (сопротивление r_j).

Для нахождения величины x одновременно перемещают ползунки всех реостатов r_j. Суммарный ток всех параллельных цепей соответствует величине z. Искомая величина определяется по величине той части полной шкалы реостатов r_j, при которой сумма токов равна z.

При использовании расчетного стола напряжение каждого источника соответствует, следовательно, p_j, постоянное сопротивление соответствует q_j, полное сопротивление каждого реостата соответствует r_j при $x = 1$. Полный ток соответствует величине z, а относительная величина перемещения движков реостатов r_j соответствует искомой величине x. *Л. И. Гутенмахер*

1493 П. Электромеханическое счетно-решающее устройство. Эйджинс (Electromechanical calculating apparatus. Agins George) [Arma Corporation, N. Y., США]. Пат. США 2625327, кл. 235—61, 13.01.53

Электромеханическое устройство, предназначенное для вычисления произведения двух функций, из которых одна задана в виде тока, а другая в виде угла поворота.

Устройство состоит из ротора и статора с железом (по типу электродвигателя). Ток протекает по обмоткам статора и ротора. Напряжение, снимаемое с дополнительной обмотки ротора, пропорционально произведению первичного тока на угол поворота ротора относительно некоторого нулевого положения. *Н. В. Корольков*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

1494. Навигационное счетно-решающее устройство «Коллинс» (The Collins navigation computer), Flight Mag., 1953, **39**, № 1, 22—23 (англ.)

Краткое описание автоматического устройства типа 560 С-1 фирмы «Коллинс» (Collins Radio Company, Cedar Rapids, Iowa), позволяющего вести самолет к месту назначения, не имеющему радиопередатчика.

Два находящиеся на самолете радиоприемника принимают сигналы от двух радиостанций. Счетное устройство определяет местонахождение самолета, решая треугольник, образованный этими двумя радиостанциями и самолетом. В счетное устройство вводятся азимут места назначения относительно одной из станций и расстояние от этой станции до места назначения; устройство дает непрерывную информацию о расстоянии до места назначения в милях и указывает отклонения от курса, а также приближается ли самолет к месту назначения или уда-

ляется от него (указатель «к» — «от»). Когда указатель расстояния дойдет до нуля, а указатель «к» — «от» перейдет в положение «от», самолет достиг цели.

Данные, необходимые для работы устройства, вводятся при помощи перфокарт.

Полный вес установки 14,5 *кг*. Источники питания: однофазный генератор 400 *гц*, 115 *в* и 28 *в* постоянного тока. Приведена фотография комплекта приборов, входящих в состав устройства.

Л. В. Купуков

1495. Электронные приборы для воздушного транспорта. Л и (Electronic devices in air transport. L e e F. B.), Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1953, **79**, № 173, 1—10 (англ.)

Обсуждаются различные вопросы, связанные с приборным оборудованием транспортных самолетов. В частности, указывается на значение в радионавигации электронных счетнорешающих устройств для определения курса самолета. Такое устройство, работающее от сигналов наземных радиостанций и использующее оборудование для измерения расстояния (DME — distances-measuring equipment) позволяет непрерывно решать тригонометрическую задачу по определению заранее выбранного курса полета.

Дальнейшим развитием навигационных счетнорешающих устройств является «изображающее счетное устройство» (pictorial computer), которое позволяет получать на экране изображение положения самолета относительно земли.

Исследования, проведенные под руководством Управления гражданской авиацией, показывают, что применение счетнорешающих устройств, дающих изображение, в сильной степени облегчает управление самолетом. *В. А. Зимин*

1496. Электронная эра в вычислительной технике (The electronic age in computing), Oil and Gas J., 1953, **51**, № 39, 57—61 (англ.)

Фирма «Хамбл ойл энд рифайнинг» (Humble Oil and Refining») применяет различные вычислительные машины, в том числе и электронные, для решения задач для нефтяной промышленности (например, задач на нестационарные газовые потоки через пористые среды, задач на равновесие двухфазных систем, задач, связанных с перегонкой нефти, и т. п.). Приведены краткие описания нескольких машин, используемых в нефтяной промышленности.

Автоматическая цифровая вычислительная машина МОНРОБОТ (MONROBOT) фирмы «Монро» (Monroe Calculating Machine Co.) выполняет действия с 20-разрядными десятичными числами. Принята система с фиксированной запятой, расположенной между 10-м и 11-м разрядом. Запоминающее устройство на магнитном барабане может хранить 100 чисел и 200 команд. Машина выполняет все арифметические операции и операцию сравнения. Ввод чисел и команд ручной или с бумажной ленты; вывод результатов — на телетайп или на быстродействующее электронное печатающее устройство. Машину обслуживает один человек. Фирма «Консолидейтед (Consolidated Engineering Corp.) выпустила устройство Спектро-САДИК (Spectro-Sadic) — преобразователь непрерывных величин в цифровые, предназначенный для автоматической записи данных от масс-спектрометра (см. реф. 1441).

Фирма «Нейшнл Каш Реджистер» (National Cash Register Co.) разработала машину, позволяющую значительно ускорить составление и печатание платежных ведомостей с учетом различных налогов, подведение баланса и других бухгалтерских работ.

Электронный вычислительный перфоратор IBM производит вычисления в отдельном электронном устройстве со скоростью 2174 сложений (вычитаний) или 86 умножений (делений) в 1 сек.

Фирма «Ремингтон Ранд» (Remington Rand Inc.) выпускает вычислительные машины УНИВАК (UNIVAC) (см. РЖМат, 1953, реф. 934). На машине УНИВАК был решен ряд задач для нефтяной промышленности, в том числе расчет глубины залегания пластов по сейсмографическим записям и составление карт вертикальных градиентов.

Фирма «Телекомпьютинг» (Telecomputing Corp.) выпускает автоматический вычерчиватель кривых (Teleplotter), работающий со скоростью 40 точек в 1 сек., электронный счетчик (Telecordex), снабженный печатающим устройством и перфоратором, и устройство для преобразования данных, снимаемых с графиков, в цифровые величины (Telereader). Приведены фотографии всех машин.

Н. Я. Матюхин

1497. Электрическое управление автоматическими машинами (Electric brains direct automatic machines), Prod. Engng and Manag., 1953, 31, № 3, 151—152 (англ.)

В заметке об использовании автоматических станков на заводах Форда указывается, что автоматически производится балансировка коленчатых валов. Соответствующая машина имеет запоминающее устройство, определяет без участия человека положение дисбаланса и затем автоматически уничтожает дисбаланс высверливанием необходимого отверстия.

1498. Обозрение промышленности (Industry observer), Aviat. Week, 1953, **58**, № 10, 7 (англ.)

Сообщается об испытании фирмой «Хьюз» (Hughes) на самолете Норт-американ F-86D вычислительного устройства, используемого вместе с радиолокатором для автоматического наведения самолета на цель. Аналогичное оборудование проектируется для самолета Локхид F = 94C.

1499. Электронная счетная машина для управления технологическими процессами (Electronic computer for process control), Chem. and Process Engng, 1953, **34**, № 5, 149 (англ.)

Сообщается, что электронная счетная машина ИРА-1103 (ERA-1103) может быть использована для автоматического управления технологическим процессом на большом нефтеперегонном или химическом заводе. Данные машины см. РЖМат, 1953, реф. 933, 1440.

1500. Вода и счетные машины. Пейнтер, Макдоналд (Water and computers. P a y n t e r H e n r y M., Jr., M a c d o n a l d N e i l), Computers and Automation, 1953, 2, № 2, 9—11 (англ.)

Краткая популярная статья о возможности применения счетных машин при решении задач регулирования на гидроэлектрических станциях.

Д. П.

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

1501. Зарисовка из прошлого венгерской математики. I. Пионеры. О б л а т (Képek a magyar matematika multjából. I. Az úttörők. O b l á t h R i c h á r d), Középiskolai mat. lapok, 1953, 6, № 3, 65—69 (венг.)

Настоящей статьей открывается серия статей по истории венгерской математики. Эта статья содержит некоторые сведения о венгерских, или работавших в Венгрии математиках XV —XVIII веков.

На фоне низкого уровня математики и ее преподавания в эпоху феодализма и подчинения науки церкви отмечаются прежде всего такие факты как чтение лекций по математике в братиславском университете (основан в 1465 г.), в университете в Надьсомбате, на курсах, имевших характер высших школ, при протестантских коллегиях в Дебрецене, Шарошпатаке, Надьеньеде. Отсутствие выдающихся математиков в Венгрии в рассматриваемый период объясняется общим состоянием цивилизации и экономическим положением страны.

Этим же объясняется то обстоятельство, что первыми математиками, работавшими в Венгрии, были иностранцы: Регпомонтан (1436—1476), таблицы синусов которого были составлены им во время его пребывания в Венгрии (в Буда); Рэтик — известный ученик и пропагандист идей Коперника, умерший в Кашше (1576), куда он был приглашен «капитаном» верхней Венгрии — Рубером; преподаватели реформатских гимназий (начало XVII в.) Альштед в Дьюлахерваре и Коменус — в Шарошпатаке (в качестве дьюлахерварского преподавателя Альштед издал в 1620 г. математическую энциклопедию, которая была в Германии первой и заслужила похвалу Лейбница).

В числе первых математиков-венгров упоминаются: Георгий де Хунгария, выпустивший в 1499 г. арифметическую книгу в Голландии (переиздана в 1894 г. Венгерской академией наук); Гашпар Хелтаи — автор первого математического сочинения на венгерском языке, так называемой «Дебреценской арифметики» (1577, 1582, 1591 — последнее издание в Клуже); Янош Апации Чере — автор венгерской энциклопедии XVII в. и учебника арифметики на венгерском языке (1655).

Как наилучшая из старых венгерских книг по арифметике приводится учебник выдающегося преподавателя дебреценской реформатской коллегии Дьёрдя Мароти (1715—1744), вышедший в 1743 г. и выдержавший ряд изданий (последнее в 1782 г.). Особое внимание уделяется и поныне еще пользующемуся в Венгрии легендарной известностью преподавателю той же дебреценской коллегии Иштвану Хатвани (1718—1786), ученику обоих Бернулли, впервые занимавшемуся в Венгрии теорией вероятностей (таблицы смертности). В числе представителей старой дебреценской школы упоминается также Ференц Керекеш (1784—1850), вместе с Яношем и Фаркашем Бояи явившийся участником конкурса на лучшее произведение по теории комплексных чисел и получивший премию.

Наряду с Дебреценом все возрастающую роль в XVIII в. играет университет в Надьсомбате (в 1777 переведен в Буда, в 1784 — в Пешт), в котором в 1774 г. была создана первая математическая кефедра, возглавленная Иожефом Миттерпахером (1739—1788). Еще более старым представителем той же школы надьсомбатских иезуитов является Пал Керекгедаи Мако, впоследствии преподаватель венского университета, автор одного из лучших в XVIII в. учебников дифференциального и интегрального исчисления (1768, латынь). Другими авторами латинских учебников по математике (для средней школы) являются надьсомбатские иезуиты Дубовски и Секей (1694), Яноши (1737), Микша Хелл (1755). Преемниками Иожефа Миттерпахера на кафедре математики были Карой Хадали (1734—1834), Андраш Дугонич, Янош Пасквич (1753—1829). Из них первый был членом Гёттингенской академии наук; второй — автор популярных в свое время учебников математики на венгерском языке, известен больше как романист; третий — создатель премиального фонда для слушателей университета, пользовался известностью у математиков (его хвалил Гаусс).

Из неуниверситетских математиков упоминаются графы Йожеф и Шамуэл Телеки, а также Игнац Мартинович (1755—1795), погибший мученической смертью за свободу на поле битвы.

Первым венгерским математиком, сделавшим самостоятельное открытие, доложенное в 1791 г. Берлинской академии наук и опубликованное (и премированное) в 1796 г., был Пал Шипош.

П р и м е ч а н и я р е ф е р е н т а: 1. Вряд ли следует превозносить использование суеверия для создания популярности, как это делает автор в применении к Хатвани; 2. Неверно, что Екатерина II, приглашая выдающихся иностранных ученых, включила Россию в культуру математики; Эйлер был приглашен в Россию вскоре после основания Петербургской академии наук (по плану Петра I, а не Екатерины II), и, кстати, только в России, по его собственному признанию, стал великим математиком; 3. Неясно, в чем заключались заслуги в области математики графов Йожефа и Шамуэла Телеков; 4. Для характеристики мировоззрения первых венгерских математиков недостаточно общего указания на то, что «идеалистическая философия привела их к математическим спекуляциям». В переведенной на русский язык, по указанию Петра I, «Геометрии-практике» (Пиркенштейна), написанной по венгерским материалам (вплоть до винье ток, изображающих венгерские города и замки), имеются замечательные материалистические высказывания о соотношении теории и практики, характерные, повидимому, не только для этой книги; 5. В статье совсем не освещено содержание упоминаемых автором книг и работ (особенно венгерских авторов), не приведены какие-нибудь примеры или задачи. *С. А. Яновская*

1502. Происхождение проективной геометрии. А г о с т и н и (Le origini della geometria proiettiva. A g o s t i n i A m e d e o), Archimede, 1953, 5, № 2, 77 (итал.)

1503. О математических и гармонических соотношениях в природе. Б л о х (Über mathematische und harmonische Verhältnisse in der Natur. B l o c h K u r t), Naturwiss. Rundschau, 1953, 6, № 2, 53—56 (нем.)

Ссылаясь на современные естествознание и математику, автор делает попытку возродить реакцион-

ную философию «универсального пифагореизма».

По мнению автора, точка зрения древнего пифагореизма (сущее есть число, и притом целое число), которую он приписывает также Аристотелю и Платону, не находила достаточного подтверждения только потому, что не были развиты математика и естествознание. Во всей природе, в том числе и органической, господствуют математические соотношения гармонии, т. е. симметрия, ритм, периодичность. Последние часто бывают глубоко скрыты и поэтому требуют тонких методов исследования. Так было, например, в современной атомной физике с обнаруженными ею (методами спектрального анализа и кристаллографии) соотношениями симметрии.

Отклонения от этих соотношений, однако, возможны, но они являются признаком болезни или вырождения. Не случайно даже в технике дефекты в материале обнаруживаются оптическими методами на основании отклонений от симметрии в его микроструктуре. Обнаружение в отложениях какого-нибудь периода несимметричных видоизменений симметричных форм другого периода и в палеонтологии рассматривается как признак вырождения, позволяющий установить последовательность периодов. Ссылаясь на авторитет Канта, автор утверждает вообще, что роль математики в биологии должна быть не меньшей, чем в других науках: математика организмов только глубже скрыта.

Вряд ли нужно доказывать советскому читателю, что наличие симметрий и периодичности в природе отнюдь не означает правильности «универсального пифагореизма» и соответствующего — хотя бы с некоторыми оговорками, как у автора — подчинения естествознания математике. *С. А. Яновская*

1504. **Андрей Николаевич Колмогоров (к пятидесятилетию со дня рождения).** **Александров П. С., Хинчин А. Я.,** Усп. мат. наук, 1953, 8, № 3(55), 177—200

Биография акад. А. Н. Колмогорова и подробный обзор его научных трудов. Приводится библиография напечатанных работ юбиляра.

1505. **Елизавета Федоровна Литвинова.** **Грацианская Л. Н.,** Математика в школе, 1953, № 4, 64—67

Биография известного педагога-математика, деятельницы женского образования в дореволюционной России Е. Ф. Литвиновой (1845—1919).

1506. **Юлий Осипович Гурвиц.** **Андронов И. К.,** Математика в школе, 1953, № 4, 81—83

Некролог методиста-математика Ю. О. Гурвица (1882—1953).

1507. **Иоганнес Тропфке.** **Фогель** (Johannes Tropfke. Vogel Kurt), Arch. Internat. histoire sci., 1953, 6, № 22, 86—88 (нем.)

Некролог известного немецкого специалиста в области истории математики И. Тропфке (1866—1939). *И. Г. Башмакова*

1508. **Теоремы о трисекции угла (Киннер — Гюйгенс — Комье — Бернулли).** **Конте.** (Proposizioni relative alla triszione dell'argomento (Kinner — Huygens — Comiers — Bernoulli). Conte Luigi), Archimede, 1953, 5, № 2, 77—80 (итал.)

Излагаются теоремы о трисекции угла, сообщенные в 1653—1654 г. немецким любителем математики Г. А. Киннером Х. Гюйгенсу, применившему их к механическому решению задачи Архимеда о рассечении шара на два сегмента с данным отношением объемов; разбирается теорема о трисекции угла, найденная Б. Бернулли (1683) в связи с решением одной задачи, поставленной французским любителем математики К. Комье. *А. П. Юшкевич*

1509 **РЕЦ.** **Очерки по истории математики в России. Гнеденко Б. В.,** 247 стр., Гостехиздат, М.—Л.,1946 6 руб. [Рецензия: **Феттер** (Vetter Q.), Arch. Internat. histoire sci., 1953, 6, № 22, 105—106 (франц.)]

1510 **РЕЦ.** **История математики от зарождения цивилизации до XIX века. Лория** (Storia delle matematiche dall' alba della civiltà al secolo XIX. Loria Gino, pp. 975, 80 fig., Edizione Ulrico Hoepli, Milano, 1950, L. 3800) [Рецензия: **Флеккенштейн** (Fleckenstein J. O.), Experientia, 1953, 9, № 6, 277—228 (нем.)]

1511 **РЕЦ.** **Математические рукописи. Николай Кузанский** (Die Mathematischen Schriften. Nicolaus von Cues. Übersetzt von Josepha Hofmann, mit einer Einführung und Anmerkungen versehen von Joseph Ehrenfried Hoffmann, I vol., pp. 268, Verlag F. Meiner, Hamburg, 1952, 25DM) [Рецензия: **Серджеску** (Sergescu P.), Arch. Internat. histoire sci., 1953, 6, № 22, 106—108 (франц.)]

1512 **РЕЦ.** **Лобачевский. Каган В. Ф.,** 506 стр., Изд-во АН СССР, М —Л., 1948, 25 руб. [Рецензия: **Титс** (Tits J.), Arch. Internat. histoire sci., 1953, 6, № 22, 108—110 (франц.)]

1513 **РЕЦ.** **Научные труды Рене Декарта (1596—1650). Скотт** (The scientific work of René Descartes (1596 — 1650). Scott J. F., pp. 211, London, Taylor and Francis, 1952, 20 s.) [Рецензии: **Керри** (Currie J.), J.Soc. Glass Technol., 1953, 37, № 175, 10N—11N; **Дингл** (Dingle Herbert), Proc. Phys. Soc., 1953, 66B, ч. 5, № 401, 433—434 (англ.)]

1514 **РЕЦ.** **Метод Декарта (Изучение «Правила»). Бек** (The method of Descartes (A study of the Regulae). Beck L. J., pp. 316, Oxford Clarendon Press, 1952, 30 s.) [Рецензия: (S. K.), Philos. Mag., 1953, сер. 7, 44, № 352, 564 (англ.)]

1515 **РЕЦ.** **Пьер Ферма. Итар** (Pierre Fermat. Itard J., S. 24, Birkhäuser, Basel, 1950) [Рецензия: **Хольцер** (Holzer H.), Internat. math. Nachr, 1953, 7, № 25/26, 49—50 (нем.)]

1516 **Д.** **К вопросу об истории преподавания элементов высшей математики в средней школе. Дадунашвили С. А.** Автореф. дисс.канд. пед. н., Н.-и. ин-т пед. наук М-ва просвещ. Груз. ССР, Тбилиси, 1953

См. также: 1013, 1015, 1358, 1431

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Агостини 1502
Адамар 1218 **РЕЦ**
Алберт 1110
Александров П. С. 1504
Алексевич 1249
Аллен 1255
Аллен 1355
Аллен 1403
Андронов И. К. 1506
Анкочея 1388
Аргунов Б. 1348 **РЕЦ**
Арешкин Г. Я. 1112, 1132 **Д**
Ариньш Е. Г. 1135
Арлей 1285 **РЕЦ**
Аруффо 1171
Атрашенок П. В. 1191
Атчисон 1363 **РЕЦ**

Б

Бабакова О. И. 1181 **Д**
Балк М. 1348 **РЕЦ**
Бань 1375
Бардсли 1478
Барн Н. К. 1142
Бартлетт 1271
Баяда 1204
Бейли 1282
Бейтман 1410
Бек 1514 **РЕЦ**
Белл 1187
Белман 1226
Бергер 1223 **РЕЦ**
Бергштрессер 1338 **РЕЦ**
Березин Б. П. 1322 **К**
Березина Л. Я. 1373
Берекашвили В. А. 1241
Берман С. Д. 1082
Берман 1114
Бернбаум 1302
Бёрнер 1483
Бернштейн С. Н. 1141
Бешлин 1078 **РЕЦ**
Бибербах 1348 **РЕЦ**
Бикли 1427 **РЕЦ**
Биллинг 1432, 1460
Бини 1059
Бирниделли 1203
Бирман М. Ш. 1250
Бирман 1432
Блан Лапьерр 1278
Блох 1503
Блэк 1031 **РЕЦ**
Боклер 1486 **РЕЦ**
Бомпьяни 1361, 1362 **РЕЦ**
Бор 1019 **РЕЦ**
Борру 1407
Борухов Л. Е. 1199 **Д**
Босе 1152
Бохнер 1172, 1273, 1274, 1275
Брак 1077 **РЕЦ**
Бредихин Б. М. 1036
Брёйн 1245
Брейнин 1469
Брени 1314, 1315
Бронуэлл 1022 **РЕЦ**
Брудно А. Л. 1242, 1243
Брукер 1429
Брукс 1286 **РЕЦ**
Брус 1402
Будак Б. М. 1069 **РЕЦ**
Буземан 1390
Букович 1420 **РЕЦ**
Булиган 1029 **РЕЦ**, 1228 **РЕЦ**
Бурау 1383
Бурбаки 1017 **РЕЦ**, 1139 **РЕЦ**
Бух 1285 **РЕЦ**
Бухнер 1333 **РЕЦ**
Бэн 1192
Бюкнер 1223 **РЕЦ**
Бюшгенс С. 1331 **РЕЦ**

В

Вагнер В. В. 1089
Вайнберг М. М. 1222
Ваккаро 1369, 1376
Ваккарино 1026
Валентайн 1391
Вальфиш А. З. 1040
Ван 1075
Ван Юн-чжоу 1381
Варнум 1415
Вейль 1015, 1091 **РЕЦ**
Вейнель 1485
Вейсспигер 1406
Веретенникова Г. К. 1352 **Д**
Вернотт 1413
Вечерка 1343
Виллерс 1485 **РЕЦ**
Вильямс 1488 **П**
Вильсон 1016 **РЕЦ**
Винклер 1310 **РЕЦ**
Виноградов И. М. 1061 **К**, 1062 **РЕЦ**
Винтнер 1197
Волкович 1337 **РЕЦ**
Воробьев Н. Н. 1116
Вудс 1330 **РЕЦ**
Вудуорд 1320
Вулфсон 1103
Вундерлих 1337 **РЕЦ**, 1363 **РЕЦ**
Вуолийоки 1336 **РЕЦ**

Г

Гавличек 1328
Гаддум 1389
Гайдук Ю. М. 1233
Галкин Ф. Я. 1487 **Д**
Галларати 1365, 1366
Галло 1417
Гамкрелидзе Р. В. 1131 **Д**
Гаррис 1057
Гейл 1392
Гельфанд И. М. 1253
Гельфонд А. О. 1063
Георгиев Г. 1411
Гиббс 1341 **РЕЦ**
Гич 1031 **РЕЦ**
Глазенап С. П. 1425 **К**
Гленн 1013
Гликсберг 1226
Гнеденко Б. В. 1283 **РЕЦ**, 1284 **РЕЦ**, 1509 **РЕЦ**
Годдард 1024 **РЕЦ**
Годо 1018 **РЕЦ**, 1367, 1377
Голдхабер 1107
Гор 1325 **РЕЦ**
Граев М. И. 1253
Гранвилл 1478
Граф 1310 **РЕЦ**, 1323 **РЕЦ**
Грацианская Л. Н. 1505
Гребенюк Д. Г. 1144
Грейбилл 1297
Грес 1339 **РЕЦ**
Гринберг Г. А. 1195
Гродзинский 1336 **РЕЦ**
Гросс 1226
Гросберг 1216 **РЕЦ**
Гуггенхеймер 1384
Гудман 1296, 1303
Гудстейн 1031 **РЕЦ**
Гулден 1307 **РЕЦ**
Гумбел 1317

Д

Давиденко Д. Ф. 1409
Дадунашвили С. А. 1516 **Д**
Далла Вольта 1362 **РЕЦ**
Дальгрен 1342 **РЕЦ**
Даммер 1473
Девинац 1256
Дейвис 1164
Дейкке 1380
Дени-Папен 1340 **РЕЦ**
Деннис 1403
Дёрри 1175 **РЕЦ**
Детловс В. К. 1025, 1033 **Д**
Дёч 1177 **РЕЦ**
Джалалов С. Д. 1240 **Д**
Джаспер 1327
Джонс 1298
Джонсон 1490 **П**
Джонсон 1288 **РЕЦ**
Джонсон 1102
Диллуэрт 1118 **РЕЦ**
Дингл 1513 **РЕЦ**
Добреску 1372
Дуглас 1083
Дюбрей 1093
Дюбуа 1480

Е

Еккель 1223 **РЕЦ**
Еникке 1472
Ессен 1019 **РЕЦ**
Ефимов Н. В. 1400 **РЕЦ**

Ж

Жгенти В. С. 1212
Жемона 1126
Жерме 1184

З

Зархина Р. Б. 1263 Д
Зилбер 1121

И

Ибрагимов И. И. 1145
Ивасава 1094
Илиев Л. 1163
Ин 1215
Иноземцев О .И. 1146
Итар 1515 **РЕЦ**

Й

Йонас 1374

К

Кабаков Ф. А. 1140 Д
Каган В. Ф. 1512 **РЕЦ**
Казанова 1364
Каландия А. И. 1213
Кампе де Ферье 1087
Канди 1334 **РЕЦ**
Канторович Л. В. 1227 **РЕЦ**
Капланский 1088
Карлиц 1050, 1051, 1052, 1053
Карп В. Н. 1205
Карпиловская Э. Б. 1404
Кауфман 1340 **РЕЦ**
Квеселава Д. А. 1166
Кёниг 1071
Керри 1513 **РЕЦ**
Кизини 1358
Кине 1198 **РЕЦ**
Кислер 1422 **РЕЦ**
Клетеник Д. В. 1332 **РЕЦ**
Кли 1251
Климов А. И. 1038
Клин 1032 **РЕЦ**
Клингенберг 1098
Кнёдель 1041
Кобер 1177 **РЕЦ**
Ковалевский 1333 **РЕЦ**
Кованько А. С. 1136
Кол 1044
Конте 1508
Коробов Н. М. 1068 Д
Коровкин П. П. 1148
Костру 1407
Крамес 1350 **РЕЦ**
Красносельский М. А. 1258
Красовский Н. Н. 1189
Крафт 1395
Крейвен 1027
Крейндлер 1354
Крижановський О.М. 1193
Кронхейм 1360
Кропачев В. Ф. 1224 Д
Крыжановскпй 1193
Куджани 1058
Кузанский Николай (см. Николай Кузанский) 1511 **РЕЦ**
Куратовский 1138 **РЕЦ**
Кюнци 1421 **РЕЦ**

Л

Лабазин В. Г. 1161
Лалагю 1149
Лампрехт 1097
Лаплас 1286 **РЕЦ**
Ларионов Б. А. 1080 Д
Лауффер 1371
Лаха 1293
Леви 1261 **РЕЦ**
Леви-Бруль-Матьё 1368
Левин 1216 **РЕЦ**
Левинсон 1291 **РЕЦ**
Левкович В. Л. 1284 **РЕЦ**
Ледерман 1272
Летт 1290 **РЕЦ**
Ли 1495
Ли Ен Пир 1180 Д
Линник Ю. В. 1276, 1283 **РЕЦ**
Липшуц 1267
Литл 1447
Литлвуд 1092 **РЕЦ**
Лихтенхельдт 1338 **РЕЦ**
Лицман 1349 **РЕЦ**
Лорд 1325 **РЕЦ**
Лория 1510 **РЕЦ**
Лорх 1260 **РЕЦ**
Лохер 1308 **РЕЦ**
Людвиг 1385 **РЕЦ**
Людфор 1206
Лудеке 1192, 1448
Лу Ци-кэн 1005
Льюк 1412
Люсси 1017 **РЕЦ**

М

Мадоу 1295
Мак-Вильямс 1431
Макдоналд 1500
Мак-Кей 1021 **РЕЦ**
Мак-Куин 1378
Мак-Лейн 1125
Мак-Нотон 1030 **РЕЦ**
Максфилд 1046
Мак-Шейн 1127
Манн 1287 **РЕЦ**
Манро 1288 **РЕЦ**
Мартин 1207
Мартин 1172
Мартинелли 1170
Марун 1217 **РЕЦ**
Марушин М. Н. 1265, 1266
Масси 1129 **РЕЦ**
Мацусита 1115
Мейер 1299
Мейер-цур-Капеллен 1486 **РЕЦ**
Мёллер 1386 **РЕЦ**
Менгер 1234 **РЕЦ**
Микеладзе М. Ш. 1405
Микусинский 1156, 1157, 1229, 1247
Миракьян Г. М. 1147
Миркин М. С. 1321 К
Мисра 1056
Михайлов Г. К. 1237
Мокрищев К. К. 1344
Монперт 1231
Мор 1070, 1422 **РЕЦ**
Морган 1020 **РЕЦ**
Моригути 1264
Моррисон 1448
Мостовский 1138 **РЕЦ**
Мочли 1489 П
Моцкин 1391
Мур 1304
Мускат 1492 П

Н

С.-Надь 1260 **РЕЦ**
Накаяма 1100
Нехари 1176 **РЕЦ**
Нибон 1363 **РЕЦ**
Николай Кузанский (см. Кузанский Николай) 1511 **РЕЦ**
Николс 1491 П
Новоселов В. С. 1276
Новоселов С. И. 1069 **РЕЦ**
Ньютон 1254

О

Облат 1501
Обрешков 1042
Оверхофф 1433
Окстоби Д. 1133
Оман 1396
Отто 1326
Отрадных Ф. П. 1006

П

Паркер 1072, 1073
Пароди 1155
Паскевич В. С. 1311
Пейнтер 1500
Пеннингтон 1045
Перлис 1077 **РЕЦ**
Перне 1104, 1105
Пидо 1370 **РЕЦ**
Пизо 1117 **РЕЦ**
Пини 1209
Пинскер М. С. 1277
Писарева Н. М. 1387 Д
Писман 1402
Платоне 1232
Платонов М. Л. 1037
Поволоцкий А. И. 1258
Погорелов А. В. 1398, 1399, 1400 **РЕЦ**
Полищук Е. 1261 **РЕЦ**
Поллак 1164
Поль 1351 **РЕЦ**
Полячек 1279, 1280
Понизовский И. С. 1119 Д
Понтрягин 1129 **РЕЦ**
Попов 1182
Попов И. В. 1158
Попова 1090
Прамберг 1324 **РЕЦ**
Прахар 1079 **РЕЦ**, 1092 **РЕЦ**, 1130 **РЕЦ**, 1138 **РЕЦ**
Прохоров Ю. В. 1268
Пуже 1312
Пыхтунов М. Т. 1225
Пьяже 1029 **РЕЦ**

Р

Раджагопал 1244
Радо 1122
Радон 1260 **РЕЦ**
Райс 1402
Райт 1054
Райт 1111
Расмуссен 1486 **РЕЦ**
Рачфорд 1402
Рёйтер 1272
Ренни 1118 **РЕЦ**
Рибарц 1291 **РЕЦ**
Рид 1020 **РЕЦ**
Риддер 1028
Рилли 1330 **РЕЦ**
Ример 1324 **РЕЦ**
Рисс 1260 **РЕЦ**
Рихтер 1010
Ричардсон 1329 **РЕЦ**
Рид 1330 **РЕЦ**
Робертс 1259
Розенлихт 1096
Рожанская Н. Н. 1179. Д
Рокетт 1095
Роллетт 1334 **РЕЦ**
Ролинс 1091 **РЕЦ**
Роте 1235 **РЕЦ**
Рохлин В. А. 1123
Рудин 1137
Рукавицын И. Н. 1356
Русу 1060
Рылл-Нардзевский 1157, 1229
Рымаренко Б. А. 1143

С

Саган 1032 **РЕЦ**
Садовский Л. Е. 1332 **РЕЦ**
Саксена 1153
Салаи 1214
Салис 1340 **РЕЦ**
Салвиг 1418
Сантало 1397
Сартр 1014
Сарымсаков Т. А. 1270
Севери 1018 **РЕЦ**
Сейбл 1215
Сельберг 1348 **РЕЦ**
Семпл 1363 **РЕЦ**
Серджеску 1511 **РЕЦ**
Сиддики 1162
Сиддонс 1020 **РЕЦ**
Симакова Э. Е. 1067 Д
Ситников К. А. 1186
Скорца-Драгони 1018 **РЕЦ**
Скотт 1238
Скотт 1513 **РЕЦ**
Слепян 1113
Смирнов М. М. 1201

Снедекор 1307 **РЕЦ**
Снелл 1020 **РЕЦ**
Соболев В. И. 1134
Собчык 1394
Солзер 1446
Сохань А. М. 1220 **Д**
Спенсер 1252
Старжинский В. М. 1190
Стивенс 1306
Стинрод 1130 **РЕЦ**
Стоун 1428
Страус 1391
Стринджер 1430
Стуббан 1349 **РЕЦ**
Студнев Ю. П. 1292 **Д**
Стюарт 1066 **РЕЦ**
Суетин П. К. 1178 **Д**

Т

Тамари 1108
Таннер 1318
Тебо 1055, 1335 **РЕЦ**
Тейлор 1300
Тернбулл 1076 **РЕЦ**
Тилман 1427 **РЕЦ**
Типпетт 1309 **РЕЦ**
Титс 1512 **РЕЦ**
Титчмарш 1063 **РЕЦ**
Том 1124
Томас 1196
Тофт 1021 **РЕЦ**
Трикоми 1160
Троицкий В. А. 1194
Троппер 1341 **РЕЦ**
Трост 1335 **РЕЦ**
Туманьян Г. Т. 1353 **Д**
Туффентзаммер 1416

У

Узков А. 1370 **РЕЦ**
Уилер 1429
Уилкс 1430
Уитни 1154
Уленбек 1128
Улер 1423
Уо 1281
Уо 1281
Успенский 1289 **РЕЦ**
Уэйнсток 1228 **РЕЦ**

Ф

Фавар 1175 **РЕЦ**
Файн Ф. А. 1322 **К**
Фёлнер 1019 **РЕЦ**
Фёльм 1421 **РЕЦ**
Феттер 1509 **РЕЦ**
Фишер 1294
Флеккенштейн 1510 **РЕЦ**
Фогель 1507
Фогель 1185
Форт 1246
Франке 1023 **РЕЦ**
Фрёйденталь 1317
Фрёйденталь 1357
Фрейзер 1301
Фрейм 1408
Фреше 1173, 1174
Фридсон 1419
Фуллер 1120
Функ 1218 **РЕЦ**
Фюрст 1235 **РЕЦ**

Х

Халилов З. И. 1401
Халлиди 1016 **РЕЦ**
Халмош 1139 **РЕЦ**
Хаммер 1394
Хао Ван 1030 **РЕЦ**
Хапланов М. Г. 1257
Харари 1128
Хартман 1197
Хартри 1420 **РЕЦ**
Хаскинд 1221
Хаскінд М. Д. 1221
Хассе 1065 **РЕЦ**
Хей 1482
Хёйзерман 1350 **РЕЦ**
Хеймилл 1085
Хейнс 1169
Хелуиг 1151
Хёльдер 1066 **РЕЦ**
Хемпсон 1461
Хеннинч 1310 **РЕЦ**, 1323 **РЕЦ**
Хенрич 1239
Херланд 1024 **РЕЦ**
Херстейн 1099, 1101
Херц 1109
Херцог 1234 **РЕЦ**
Хёфдинг 1305
Хёфингер 1183
Хилдебрандт 1248
Хинчин А. Я. 1284 **РЕЦ**, 1504
Хирон 1210, 1211
Ходж 1370 **РЕЦ**
Холл 1081
Хольмгрен 1342 **РЕЦ**
Хольцер 1515 **РЕЦ**
Хопман 1432
Хуа Ло-кен 1106
Хьюитт 1150

Ц

Цвейлинг 1217 **РЕЦ**
Цвиккер 1331 **РЕЦ**
Цетто 1022 **РЕЦ**
Циммерман 1074
Циммерман Г. К. 1074
Цурмюль 1078 **РЕЦ**

Ч

Чарнс 1215
Чарп 1484 **РЕЦ**
Черчхаус 1043
Чертков 1221
Чертков Й. Я. 1221
Чжуан Ци-тай 1230
Чжун 1269
Чудаков Н. Г. 1035, 1062 **РЕЦ**
Чудов Л. А. 1202

Ш

Шабат Б. 1176 **РЕЦ**
Шаботи 1047
Шагинян А.Л. 1165
Шаррюо 1393
Шатунов М. П. 1219 **Д**
Шварц 1308 **РЕЦ**
Шварц 1262 **РЕЦ**
Шеваллей 1065 **РЕЦ**
Шейхль 1310 **РЕЦ**
Шектер 1346
Шёнберг 1154
Шёнфелд 1064 **РЕЦ**
Шеррер 1382
Шилбери 1345
Шиллинг 1117 **РЕЦ**
Шиманов С. Н. 1188
Широков М. 1385 **РЕЦ**
Ширшов В. М. 1039
Шлютер 1432
Шметтерер 1129 **РЕЦ**
Шмидтмайер 1414
Шмульян Ю. Л. 1167
Штарке 1216 **РЕЦ**
Штейгер 1048
Штребель 1168
Штрёэр 1329 **РЕЦ**, 1330 **РЕЦ**, 1349 **РЕЦ**
Шумахер 1416

Э

Эберль 1309 **РЕЦ**
Эйджинс 1493 **П**
Эйдус Д. М. 1208
Эйзенклам 1316
Эйленберг 1121, 1125, 1130 **РЕЦ**
Эйхлер 1079 **РЕЦ**
Эккерт 1489 **П**
Эккер 1434
Эллис 1086
Эльсгольц Л. Э. 1227 **РЕЦ**
Эмбер 1159
Эмерслебен 1049
Энон 1313
Эрдейи 1236
Эрдёш 1245
Эро-Кюри 1359
Эст 1084
Эстерман 1064 **РЕЦ**

Я

Яблонский С. В. 1034 **Д**
Яглом А. М. 1277, 1284 **РЕЦ**
Якоби 1347
Якубович В. А. 1200 **Д**
Яно 1379

A

Agins G. 1493 **П**
Agostini A. 1502
Albret A. A. 1110
Allen D. N. de G. 1403
Allen E. F. 1355
Allen H. S. 1255
Alexiewicz A. 1249
Ancochea G. 1388
Arley N. 1285 **РЕЦ**
Aruffo G. 1171
Atchison W. F. 1363 **РЕЦ**
Ayrault-Curie G. 1359

B

Baeschlin F. 1078 **РЕЦ**
Baiada E. 1204
Bailey N. T. J. 1282
Bardsley W. 1478
Bartlett M. S. 1271
Bateman E. H. 1410
Beauclair 1486 **РЕЦ**
Beck L. J. 1514 **РЕЦ**
Bell J. S. 1187
Bellman R. 1226
Berger F. 1223 **РЕЦ**
Bergsträsser M. 1338 **РЕЦ**
Berman G. 1114
Bickley W. G. 1427 **РЕЦ**
Bieberbach L. 1348 **РЕЦ**
Biermann L. 1432
Billing H. 1432, 1460
Bini U. 1059
Birindelli C. 1203
Birnbaum Z. W. 1302
Black M. 1031 **РЕЦ**
Blanc-Lapierre A. 1278
Bloch K. 1503
Bochner S. 1172, 1273, 1274, 1275
Bohr H. 1019 **РЕЦ**
Bompiani E. 1361, 1362 **РЕЦ**
Börner R. 1483
Borro L. 1407
Bose S. K. 1152
Bouligand G. 1029 **РЕЦ**, 1228 **РЕЦ**
Bourbaki N. 1017 **РЕЦ**, 1139 **РЕЦ**
Branin F. H., Jr. 1469
Breny H. 1314, 1315
Bronwell A. 1022 **РЕЦ**
Brooker R. A. 1429
Brookes B. C. 1286 **РЕЦ**

Bruce G. H. 1402
Bruck R. H. 1077 **РЕЦ**
Bruijn N. G. de 1245
Buch K. R. 1285 **РЕЦ**
Buchner P. 1333 **РЕЦ**
Bückner H. 1223 **РЕЦ**
Bukovics E. 1420 **РЕЦ**
Burau W. 1383
Busemann H. 1390

C

Carlitz L. 1050, 1051, 1052, 1053
Casanova G. 1364
Chabauty C. 1047
Charnes A. 1215
Charp S. 1484 **РЕЦ**
Charrueau A. 1393
Chevalley C. 1065 **РЕЦ**
Chisini O. 1358
Chuang Chi-Tai 1230
Chung K. L. 1269
Churchhouse R. F. 1043
Cole A. J. 1044
Conte L. 1508
Craven T. L. 1027
Cronheim A. 1360
Cugiani M. 1058
Cundy H. H. M. 1334 **РЕЦ**
Currie J. 1513 **РЕЦ**

D

Dahlgren F. 1342 **РЕЦ**
Dalla Volta V. 1362 **РЕЦ**
Davis Ph. 1164
Deicke A. 1380
Denis-Papin M. 1340**РЕЦ**
Dennis S. C. R. 1403
Devinatz A. 1256
Dilworth R. P. 1118 **РЕЦ**
Dingle H. 1513 **РЕЦ**
Dobrescu A. 1372
Doetsch G. 1177 **РЕЦ**
Dörrie H. 1175 **РЕЦ**
Douglas J. 1083
Dubois Fr. 1480
Dummer G. W. A. 1473
Dubreil M. 1093

E

Eberl W. 1309 **РЕЦ**
Ecker G. 1434
Eckert J. P. 1489 **П**
Eichler M. 1079 **РЕЦ**
Eilenberg S. 1121, 1125 1130 **РЕЦ**
Eisenklam P. 1316
Ellis D. 1086
Emersleben O. 1049
Erdélyi A. 1236
Erdös P. 1245
Est W. T. 1084
Estermann T. 1064 **РЕЦ**

F

Favard J. 1175 **РЕЦ**
Fisher R. 1294
Fleckenstein J. O. 1510 **РЕЦ**
Følner E. 1019 **РЕЦ**
Fort T. 1246
Frame J. S. 1408
Franke W. 1023 **РЕЦ**
Fraser D. A. S. 1301
Fréchet M. 1173, 1174
Freedson J. 1419
Freudenthal A. M. 1317
Freudenthal H. 1357
Fuller F. B. 1120
Funk P. 1218 **РЕЦ**
Fürst D. 1235 **РЕЦ**

G

Gaddum J. W. 1389
Gale D. 1392
Gallarati D. 1365, 1366
Gallo G. 1417
Geach P. 1031 **РЕЦ**
Germay R. H. 1184
Geymonat L. 1126
Gibbs W. J. 1341 **РЕЦ**
Glenn O. E. 1013
Glicksberg I. 1226
Goddard L. S. 1024 **РЕЦ**
Godeaux L. 1018 **РЕЦ**, 1367, 1377
Goldhaber J. K. 1107
Gore W. L. 1325 **РЕЦ**
Goodman L. A. 1296, 1303
Goodstein R. L. 1031 **РЕЦ**
Goulden C. H. 1307 **РЕЦ**
Graf U. 1310 **РЕЦ**, 1323, **РЕЦ**
Granville J. W. 1478
Graybill F. A. 1297
Gres W. H. 1339 **РЕЦ**
Grodzinski P. 1336 **РЕЦ**
Gross O. 1226
Grossberg J. I. 1216 **РЕЦ**
Guggenheimer H. 1384
Gumbel E. J. 1317

H

Hadamard J. 1218 **РЕЦ**
Haigh W. 1482
Hall M., Jr. 1081
Halliday D. 1016 **РЕЦ**
Halmos P. R. 1139 **РЕЦ**
Hamill Ch. 1085
Hammer P. C. 1394
Hao Wang 1030 **РЕЦ**
Harary F. 1128
Harris V. C. 1057
Hartman Ph. 1197
Hartree D. E. 1420 **РЕЦ**
Hasse H. 1065 **РЕЦ**
Häusermann A. 1350 **РЕЦ**
Havlíček K. 1328
Hearon J. Z. 1210, 1211
Heins M. 1169
Helwig W. F. 1151
Hempson J. G. G. 1461
Henning H. J. 1310 **РЕЦ**, 1323 **РЕЦ**
Henon R. 1313
Henrici P. 1239
Herland L. 1024 **РЕЦ**
Herstein I. 1099, 1101
Herz J. 1109
Herzog F. 1234 **РЕЦ**
Hewitt E. 1150
Hildebrandt T. H. 1248
Hodge W. V. 1370 **РЕЦ**
Hoeffding W. 1305
Höfinger E. 1183
Hölder E. 1066 **РЕЦ**
Holmgren B. 1342 **РЕЦ**
Holzer H. 1515 **РЕЦ**
Hopmann W. 1432
Humbert P. 1159

I

Itard J. 1515 **РЕЦ**
Iwasava K. 1094

J

Jaeckel K. 1223 **РЕЦ**
Jakobi R. 1347
Jänicke 1472
Jasper S. J. 1327
Jessen B. 1019 **РЕЦ**
Jonas H. 1374
Jones H. L. 1298
Johnson E. A. 1490 **П**
Johnson P. B. 1288 **РЕЦ**
Johnson R. E. 1102

K

Kampé de Fériet J. 1087
Kaplansky I. 1088
Kaufmann A. 1340 **РЕЦ**
Kiessler F. 1422 **РЕЦ**
Klee V. L., Jr 1251
Kleene S. C. 1032 **РЕЦ**
Klingenberg W. 1098
Kneebone G. T. 1363 **РЕЦ**
Knödel W. 1041
Kober H. 1177 **РЕЦ**
Koenig J. F. 1071
Kostro J. 1407
Kowalewski G. 1333 **РЕЦ**
Krafft M. 1395
Krames J. L. 1350 **РЕЦ**
Kreindler O. 1354
Künzi H. P. 1421 **РЕЦ**
Kuratowski K. 1138 **РЕЦ**

L

Laett H. 1290 **РЕЦ**
Laha R. G. 1293
Lalaguë P. 1149
Lamprecht E. 1097
Laplace P. S. 1286 **РЕЦ**
Lauffer R. 1371
Ledermann W. 1272
Lee F. B. 1495
Lévy P. 1261 **РЕЦ**
Lévy-Bruhl-Mathieu P. 1368
Lewin W. I. („u“) 1216 **РЕЦ**
Levinson H. C. 1291 **РЕЦ**
Lichtenheldt 1338 **РЕЦ**
Lietzmann W. 1349 **РЕЦ**
Lipschutz M. 1267
Little V. I. 1447
Littlewood D. E. 1092 **РЕЦ**
Locher F. 1308 **РЕЦ**
Lorch E. R. 1260 **РЕЦ**
Lord E. 1325 **РЕЦ**
Loria G. 1510 **РЕЦ**
Ludeke C. A. 1192, 1448
Ludford G. S. S. 1206
Ludwig G. 1385 **РЕЦ**
Luke Y. L. 1412
Lüssy W. 1017 **РЕЦ**

M

Macdonald N. 1500
Mac Lane S. 1125
MacWilliams, W. H. Jr. 1431
MacQueen M. L. 1378
McKay A. Д. Д. 1021 **РЕЦ**
McNaughton R. 1030 **РЕЦ**
McShane E. J. 1127
Madow W. G. 1295
Mann H. B. 1287 **РЕЦ**
Martin M. H. 1207
Martin W. T. 1172
Martinelli E. 1170
Maruhn 1217 **РЕЦ**
Massey W. S. 1129 **РЕЦ**
Matsushita Shin-ichi 1115
Mauchly J. W. 1489 **П**
Maxfield J. E. 1046
Meier P. 1299
Menger K. 1234 **РЕЦ**
Meyer-zur-Capellen W. 1486 **РЕЦ**
Mikusiński J. G. 1156, 1157, 1229, 1247
Misra B. 1056
Mohr E. 1070, 1422 **РЕЦ**
Møller C. 1386 **РЕЦ**
Moore P. G. 1304
Moppert K. F. 1231
Morgan J. B. 1020 **РЕЦ**
Moriguti S. 1264
Morrison C. L. 1448
Mostowski A. 1138 **РЕЦ**
Motzkin T. S. 1391
Munroe M. E. 1288 **РЕЦ**
Muskat M. 1492 **П**

N

Sz.-Nagy B. 1260 **РЕЦ**
Nakayama T. 1100
Nehari Z. 1176 **РЕЦ**
Newton R. H. C. 1254
Nichols N. B. 1491 II
Nicolaus von Cues

O

Obláth R. 1501
Obrechkoff N. 1042
Ohmann D. 1396
Otto F. 1326
Overhoff G. 1433

P

Parker W. V. 1072, 1073
Pan T. K. 1375
Parodi M. 1155
Paynter H. M., Jr. 1500
Peaceman D. W. 1402
Pedoe D. 1370 **РЕЦ**
Pennington W. B. 1045
Perlis S. 1077 **РЕЦ**
Pernet R. 1104, 1105
Piaget J. 1029 **РЕЦ**
Pini B. 1209
Pisot Ch. 1117 **РЕЦ**
Platone G. 1232
Pohl W. 1351 **РЕЦ**
Pollaczek F. 1279, 1280
Pollak H. 1164
Pong W. 1192
Pontryagin L. S. 1129 **РЕЦ**
Popov B. S. 1182
Popova H. 1090
Pouget G. 1312
Prachar K. 1079 **РЕЦ**, 1092 **РЕЦ**, 1130 **РЕЦ**, 1138 **РЕЦ**
Pramberg Th. 1324 **РЕЦ**

Q

Quinet J. 1198 **РЕЦ**

R

Rachford H. H. 1402
Rado T. 1122
Radon J. 1260 **РЕЦ**
Rajagopal C. T. 1244
Rasmussen H. 1486 **РЕЦ**
Rawlins F. I. G. 1091 **РЕЦ**
Read C. B. 1020 **РЕЦ**
Reilly J. F. 1330 **РЕЦ**
Rennie B. C. 1118 **РЕЦ**
Reuter G. E. H. 1272
Rice J. D. 1402
Richardson M., 1329 **РЕЦ**
Richter L. 1010
Ridder J. 1028
Riesz F. 1260 **РЕЦ**
Rietz H. L. 1330 **РЕЦ**
Rimér O. 1324 **РЕЦ**
Roberts G. T. 1259
Rollett A. P. 1334 **РЕЦ**
Roquette P. 1095
Rosenlicht M. 1096
Rothe R. 1235 **РЕЦ**
Rudin W. 1137
Rusu E. 1060
Rybarz J. 1291 **РЕЦ**
Ryll-Nardzewski C. 1157, 1229

S

Sagan H. 1032 **РЕЦ**
Saibel E. 1215
Saksena K. M. 1153
Salis 1340 **РЕЦ**
Salvig E. 1418
Salzer J. M. 1446
Santaló M. A. 1397
Sartre L. 1014
Schecter I. A. 1346
Scheichl 1310 **РЕЦ**
Scherrer W. 1382
Schilling O. F. G. 1117 **РЕЦ**
Schlüter A. 1432
Schmidtmayer J. 1414
Schmetterer L. 1129 **РЕЦ**
Schoenberg I. J. 1154
Schoenfeld L. 1064 **РЕЦ**
Schumacher P. 1416
Schwarz A. 1308 **РЕЦ**
Schwartz L. 1262 **РЕЦ**
Scorza-Dragoni G. 1018 **РЕЦ**
Scott E. J. 1238
Scott J. F. 1513 **РЕЦ**
Selberg S. 1348 **РЕЦ**
Semple J. G. 1363 **РЕЦ**
Sergescu P. 1511 **РЕЦ**
Severi F. 1018 **РЕЦ**
Shilbury E. W. 1345
Siddons A. W. 1020 **РЕЦ**
Siddiqi J. A. 1162
Slepian D. 1113
Snedecor G. W. 1307 **РЕЦ**
Snell K. S. 1020 **РЕЦ**
Sobczyk A. 1394
Spencer D. C. 1252
Starke D. 1216 **РЕЦ**
Steenrod N. 1130 **РЕЦ**
Steiger F. 1048
Stevens W. L. 1306
Stewart B. M. 1066 **РЕЦ**
Stone J. J. 1428
Straus E. G. 1391
Strebel K. 1168
Stringer J. B. 1430
Ströher W. 1329 **РЕЦ**, 1330 **РЕЦ**, 1349 **РЕЦ**
Stubban J. O. 1349 **РЕЦ**
Szalay L. 1214

T

Tamari D. 1108
Tanner J. C. 1318
Taylor W. F. 1300
Thébault V. 1055, 1335 **РЕЦ**
Thielman H. P. 1427 **РЕЦ**
Thom R. 1124
Thomas J. 1196
Tippett L. H. C. 1309 **РЕЦ**
Titchmarsh E. C. 1063 **РЕЦ**
Tits J. 1512 **РЕЦ**
Toft L. 1021 **РЕЦ**
Tricomi F. G. 1160
Tropper H. 1341 **РЕЦ**
Trost E. 1335 **РЕЦ**
Tuffentsammer K. 1416
Turnbull H. W. 1076 **РЕЦ**

U

Uhlenbeck G. 1128
Uhler H. S. 1423
Uspensky J. U. 1289 **РЕЦ**

V

Vaccaro G. 1369, 1376
Vaccarino G. 1026
Valentine F. A. 1391
Varnum E. C. 1415
Večerka J. 1343
Vernotte P. 1413
Vetter Q. 1509 **РЕЦ**
Vogel K. 1507
Vogel Th. 1185
Völlm E. 1421 **РЕЦ**

W

Waugh D. F. 1281
Waugh F. V. 1281
Weinel 1485 **РЕЦ**
Weinstock R. 1228 **РЕЦ**
Weissinger J. 1406
Weyl H. 1015, 1091 **РЕЦ**
Wheeler D. J. 1429
Whitney A. 1154
Willers Fr. A. 1485
Williams S. B. 1488 II
Wilkes M. V. 1430
Wilson E. B. 1016 **РЕЦ**
Winkler 1310 **РЕЦ**
Wintner A. 1197
Wolfson K. G. 1103
Wolkowitsch D. 1337 **РЕЦ**
Wong Y. K. 1075
Wong Yung-Chow 1381
Woods R. 1330 **РЕЦ**
Woodward P. M. 1320
Wright E. M. 1054
Wright F. B. 1111
Wunderlich W. 1337 **РЕЦ**, 1363 **РЕЦ**
Wuolijoki J. 1336 **РЕЦ**

Y

Yano K. 1379
Ying A. S. C. 1215

Z

Zetto L. 1022 **РЕЦ**
Zilber J. A. 1121
Zweiling K. 1217 **РЕЦ**
Zwikker C. 1331 **РЕЦ**
Zurmühl R. 1078 **РЕЦ**